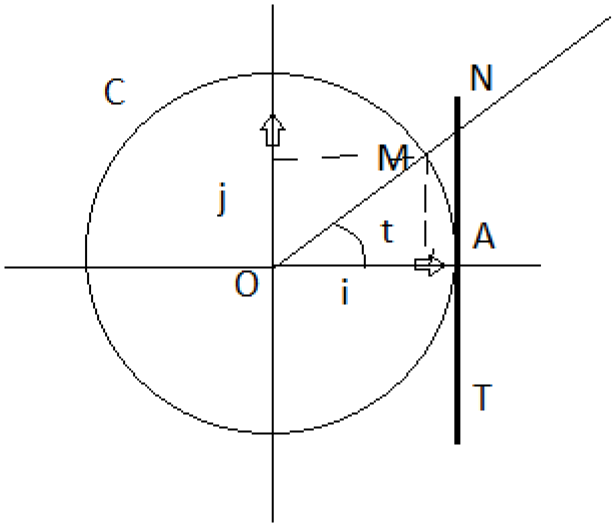
A. Approche Graphique

La figure ci-contre représente le cercle trigonométrique *C* de centre O dans le repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.



On note T la tangente à *C* au point A (1 ; 0).

Pour tout nombre t de l'intervalle $\mathrm{I} = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on note M le point du cercle trigonométrique associé à t.

1\. *a*. Justifiez que la droite (OM) coupe la tangente T pour tout nombre t de l'intervalle I .

b. Exprimez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ en fonction de t.

c. On appelle N le point d'intersection de (OM) et de T. On note tan(t) (on lit « tangente ») l'ordonnée du point N; le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ *a* donc pour coordonnées (1 ; tan (t)).

Démontrez que pour tout t de I, $\tan(t) = \dfrac{\sin t}{\cos t}$.

2\. On envisage de représenter dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ la fonction tangente définie sur I.

a. Étudiez la dérivabilité de la fonction tangente sur l'intervalle I et déterminez une expression de sa fonction dérivée.

b. Démontrez que pour tout t de I, $\tan(-t) = -\tan(t)$. Quelle conséquence graphique résulte de cette propriété ?

c. Déduisez-en les variations de la fonction tangente sur l'intervalle I. Dressez son tableau de variation sur I, en précisant les limites aux bornes de cet intervalle.

3\. *a*. La fonction tangente est dérivable en 0 (voir 2. *a*)). Justifiez que la représentation graphique C_{tan} de la fonction tangente sur I passe par l'origine O du repère et déterminez l'équation réduite de la tangente *d* en O à C_{tan} .

b. On envisage, dans cette question, d'étudier la position relative de C_{tan} et *d*. On considère pour cela la fonction f définie sur I par $f(x) = \tan(x) - x$. Étudiez les variations de f sur I. Déduisez-en le signe de $f(x)$ sur I et la position de C_{tan} par rapport à *d*.

B. Généralisation

Les fonctions sinus et cosinus étant définies sur R, on envisage d'étendre la fonction tangente à R.

1\. Déterminez les valeurs pour lesquelles la fonction tangente n'est pas définie.

2\. On note *D* l'ensemble des nombres pour lesquels la fonction tangente est définie. Justifiez que pour tout nombre t de *D*, $\tan(t + \pi) = \tan(t)$. Ainsi, la fonction tangente est périodique, de période π. Quelle conséquence graphique en déduisez-vous ?

3\. Dans cette question, k désigne un nombre entier relatif quelconque. Prouvez que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ est asymptote verticale à la courbe représentant la fonction tangente.

4\. Tracez, éventuellement à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel adapté, la courbe représentative de la fonction tangente et ses éventuelles asymptotes sur l'intervalle $\left]-\frac{5\pi}{2}\,;\frac{5\pi}{2}\right[$.

CORRECTION

A. Approche Graphique

1. *a*. La droite (OM) fait un angle de mesure t avec l'axe des abscisses et $t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ donc la droite (OM) n'est pas perpendiculaire à l'axe des abscisses.

T est la tangente à *C* au point A (1 ; 0) donc T est perpendiculaire à (OA) donc à l'axe des abscisses.

Si (OM) est parallèle à T alors (OM) est perpendiculaire à l'axe des abscisses ce qui n'est pas le cas donc (OM) et T ne sont pas parallèles, (OM) et T sont sécantes quel que soit $t \in$ I.

***b*.** M est un point de *C* et $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}) = t$ donc $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ a pour coordonnées (cos t ; sin t).

***c*.** Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ donc $\begin{cases} 1 = k\cos t \\ \tan(t) = k\sin t \end{cases}$

$t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos t \neq 0$ donc $k = \dfrac{1}{\cos t}$ donc pour tout t de I, $\tan(t) = \dfrac{\sin t}{\cos t}$.

2. On envisage de représenter dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ la fonction tangente définie sur I.

a. Les fonctions cosinus et sinus sont définies dérivables sur R, la fonction cosinus ne s'annule pas sur I donc la fonction tangente est dérivable sur I

$\begin{cases} u(t) = \sin t & u'(t) = \cos t \\ v(t) = \cos t & v'(t) = -\sin t \end{cases}$ donc la dérivée de tan t est égale à $\dfrac{\cos^2 t - \sin t \times (-\sin t)}{\cos^2 t} = \dfrac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

b. pour tout t de I, $-t \in$ I
La fonction sinus est impaire, $\sin(-t) = -\sin t$
La fonction cosinus est paire, $\cos(-t) = \cos t$ donc $\tan(-t) = \dfrac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = -\dfrac{\sin t}{\cos t}$.

La fonction tangente est impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine O du repère, il suffit donc d'étudier la fonction sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

c. Soit $g(t) = \tan(t)$, $g'(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ donc $g'(t) > 0$ donc g est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

$\lim\limits_{\substack{t \to \frac{\pi}{2} \\ t < \frac{\pi}{2}}} \sin t = 1$ et $\lim\limits_{\substack{t \to \frac{\pi}{2} \\ t < \frac{\pi}{2}}} \cos t = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{t \to \frac{\pi}{2} \\ t < \frac{\pi}{2}}} \tan t = +\infty$

La fonction tangente étant impaire $\lim\limits_{\substack{t \to -\frac{\pi}{2} \\ t > \frac{\pi}{2}}} \tan t = -\infty$.

t	$-\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{\pi}{2}$
$g'(t)$	‖	$+$	‖
g	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖

3. *a.* $\sin 0 = 0$ et $\cos 0 = 1$ donc $\tan 0 = 0$ donc la représentation graphique C_{tan} de la fonction tangente sur I passe par l'origine O du repère.

$g'(0) = \dfrac{1}{\cos^2 0} = 1$ donc l'équation réduite de la tangente d en O à C_{tan} est $y = x$.

b. $f(x) = \tan x - x$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 t} - 1 = \dfrac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}$ donc $f'(x) \geq 0$

La fonction f est strictement croissante sur I et $f(0) = 0$ donc :
si $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0)$ soit $f(x) \geq 0$ donc C_{tan} est au dessus de d.
si $x \leq 0$, $f(x) \leq f(0)$ soit $f(x) \leq 0$ donc C_{tan} est en dessous de d.

B. Généralisation

1. La fonction tangente n'est pas définie quand $\cos x = 0$ soit quand $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

2. Pour tout nombre t de D, $t + \pi \in$ D et $\sin(t + \pi) = -\sin t$ et $\cos(t + \pi) = -\cos t$

donc $\tan(t + \pi) = \dfrac{\sin(t+\pi)}{\cos(t+\pi)} = \dfrac{-\sin t}{-\cos t} = \dfrac{\sin t}{\cos t} = \tan t$

La fonction tangente est périodique, de période π donc, il suffit de la tracer sur un intervalle d'amplitude π par exemple I puis de faire des translations de vecteurs $k\pi\,\vec{i}$ où k est un entier relatif.

3. k est soit pair (de la forme $2n$) soit impaire (de la forme $(2n + 1)$).

$\lim\limits_{\substack{t \to \frac{\pi}{2}+2n\pi \\ t < \frac{\pi}{2}+2n\pi}} \sin t = 1$ et $\lim\limits_{\substack{t \to \frac{\pi}{2}+2n\pi \\ t < \frac{\pi}{2}+2n\pi}} \cos t = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{t \to \frac{\pi}{2}+2n\pi \\ t < \frac{\pi}{2}+2n\pi}} \tan t = +\infty$ donc la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ est asymptote verticale à la courbe représentant la fonction tangente.

$\lim\limits_{\substack{t \to \frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi \\ t < \frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi}} \sin t = -1$ et $\lim\limits_{\substack{t \to \frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi \\ t < \frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi}} \cos t = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{t \to \frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi \\ t < \frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi}} \tan t = +\infty$ donc la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2} + (2n+1)\pi$ est asymptote verticale à la courbe représentant la fonction tangente.

La droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ est asymptote verticale à la courbe représentant la fonction tangente.

4.