On rappelle que $\sum_{i=0}^{i=n} u_i$ désigne la somme des termes $u_0 + u_1 \dots + u_n$.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout , $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4^n$

On se propose dans les questions 1. et 2. de déterminer $u_n$ en fonction de $n$ de deux façons différentes.

1. 1ère méthode : Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $u_n = \frac{8}{11}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{11}\times 4^n$

2. 2ème méthode : On pose, pour tout entier naturel $n$, $v_n = 3^n u_n$ .

   *a.* Montrer, sans utiliser la question 1., que pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $v_{n+1} = v_n + 3 \times 12^n$

   *b.* Calculer $\sum_{i=0}^{i=n-1}(v_{i+1} - v_i)$ de deux manières différentes.

   *c.* Retrouver l'expression de $u_n$ trouvée à la question 1.

3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

**CORRECTION**

1. Initialisation : $u_0 = 1$ et donc $\frac{8}{11}\times\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \frac{3}{11}\times 4^0 = \frac{8}{11} + \frac{3}{11} = 1$ donc $u_0 = \frac{8}{11}\times\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \frac{3}{11}\times 4^0$ . La propriété est initialisée.

Hérédité : montrons que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, si $u_n = \frac{8}{11}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{11}\times 4^n$ alors $u_{n+1} = \frac{8}{11}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{3}{11}\times 4^{n+1}$.

$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4^n$ et $u_n = \frac{8}{11}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{11}\times 4^n$ donc $u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{11}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{11}\times 4^n\right) + 4^n$

$u_{n+1} = \frac{8}{11}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{11}\times 4^n + 4^n = \frac{8}{11}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{11} + 1\right)\times 4^n$

$u_{n+1} = \frac{8}{11}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{12}{11}\times 4^n$ or $12 = 3 \times 4$ donc $u_{n+1} = \frac{8}{11}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{3}{11}\times 4^{n+1}$.

La propriété est héréditaire

Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout $n$ de $n$, $u_n = \frac{8}{11}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{11}\times 4^n$

2. *a.* $u_n = \frac{1}{3^n}v_n$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4^n$ donc $\frac{1}{3^{n+1}}v_{n+1} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3^n}v_n + 4^n$ donc en multipliant par $3^{n+1}$ : $v_{n+1} = v_n + 3^{n+1}\times 4^n$

$v_{n+1} = v_n + 3 \times 3^n \times 4^n$ donc $v_{n+1} = v_n + 3 \times 12^n$

*b.*

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}(v_{i+1} - v_i) = \begin{array}{ccc} \cancel{v_1} & - & v_0 \\ \cancel{+v_2} & - & \cancel{v_1} \\ \cancel{\dots} & - & \cancel{\dots} \\ \cancel{+v_{n-1}} & - & \cancel{v_{n-2}} \\ +v_n & - & \cancel{v_{n-1}} \end{array}$$

Les cases colorées se simplifient donc $\sum_{i=0}^{i=n-1}(v_{i+1} - v_i) = v_n - v_0$

Pour tout entier $n$, $v_{n+1} = v_n + 3 \times 12^n$ donc $v_{n+1} - v_n = 3 \times 12^n$

donc $\sum_{i=0}^{i=n-1}(v_{i+1} - v_i) = \sum_{i=0}^{i=n-1} 3\times 12^i = 3 \times \frac{12^n - 1}{12 - 1}$

$v_n - v_0 = 3 \times \frac{12^n - 1}{11}$ or $v_0 = 3^0 u_0 = 1$ donc $v_n = 1 + 3 \times \frac{12^n - 1}{11} = \frac{3}{11}\times 12^n + \frac{8}{11}$

*c.* pour tout entier naturel $n$, $v_n = 3^n u_n$ donc $3^n u_n = \frac{3}{11}\times 12^n + \frac{8}{11}$ donc $u_n = \frac{3}{11}\times\frac{12^n}{3^n} + \frac{8}{11}\times\frac{1}{3^n} = \frac{3}{11}\times 4^n + \frac{8}{11}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

3. Pour tout entier naturel $n$, $u_n = \frac{3}{11}\times 4^n + \frac{8}{11}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ or $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$,

$4 > 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$