

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

$(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe i , B d'affixe $-2i$ et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z ($z \neq i$) associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{2z-i}{iz+1}$.

1. Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$.

2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f .

3. a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i , $(z' + 2i)(z - i) = 1$.

b. En déduire que pour tout point M d'affixe z ($z \neq i$) :

$BM' \times AM = 1$ et $(\vec{u}, \vec{BM'}) = -(\vec{u}, \vec{AM}) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

4. a. Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b. En utilisant les résultats de la question 3. b., placer le point E' associé au point E par l'application f . On laissera apparents les traits de construction.

5. Quelle est la nature du triangle B D' E' ?

CORRECTION

1. ADE est un triangle équilatéral direct donc E est l'image de D dans la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$,

$$\text{donc } z_E - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A) \Leftrightarrow z_E - i = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i) \Leftrightarrow z_E - i = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_E = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i \Leftrightarrow z_E = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$.

$$2. \quad z_{D'} = \frac{2 \times 1 - i}{i \times 1 + 1} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-i-2i-1}{2} \Leftrightarrow z_{D'} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$$

$$3. a. \quad z' + 2i = \frac{2z-i}{iz+1} + 2i = \frac{2z-i+2i(iz+1)}{iz+1} \text{ donc } z' + 2i = \frac{2z-i-2z+2i}{iz+1} = \frac{i}{iz+1}$$

$$iz+1 = i(z-i)^2 = i(z-i) \text{ donc } z' + 2i = \frac{i}{i(z-i)} = \frac{1}{z-i} \text{ donc } (z' + 2i)(z-i) = 1 \text{ pour tout nombre complexe } z \text{ différent de } i.$$

b. $(z' + 2i)(z-i) = 1$ donc $|z' + 2i| |z-i| = 1$ et $\arg(z' + 2i)(z-i) = 0 + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

or $|z' + 2i| = |z_{M'} - z_B| = BM'$ et $|z-i| = |z - z_A| = AM$ soit $BM' \times AM = 1$

$\arg(z' + 2i)(z-i) = \arg(z' + 2i) + \arg(z-i)$

donc $\arg(z' + 2i) = -\arg(z-i) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif soit $(\vec{u}, \vec{BM'}) = -(\vec{u}, \vec{AM}) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

$$4. a. \quad AD = |1+i| = \sqrt{2}$$

$$AE = |z_E - z_A| = \left| \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i - i \right| = \left| \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i \right|$$

$$AE^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} = 2$$

donc $AE = \sqrt{2}$, les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b. Pour tout point M différent de A, $BM' \times AM = 1$ donc si $M = E$: $BE' \times AE = 1$ soit $BE' \times \sqrt{2} = 1$ donc $BE' = \frac{\sqrt{2}}{2}$

E' appartient au cercle de centre B de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2} = BI$ où I est le milieu de [AE].

Si $M \neq A : (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif, en particulier si $M = E$ on obtient :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) + k \times 2\pi$$

Construisons la médiatrice de $[AE]$, elle coupe $[AE]$ en I milieu de AE

Construisons le parallélogramme $AE E_1 O$ alors $(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OE_1})$

Soit E_2 le symétrique de E_1 par rapport à l'axe des réels donc $(\vec{u}, \overrightarrow{OE_2}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OE_1})$ donc $(\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AE_2}) + k \times 2\pi$

Construisons le parallélogramme $BOE_2 E_3$ donc $(\vec{u}, \overrightarrow{BE_3}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OE_2})$

$$\text{donc } (\vec{u}, \overrightarrow{BE_3}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) + k \times 2\pi$$

E' appartient donc à la demi-droite d d'origine B passant par E_3 donc E' est le point d'intersection de d et du cercle de centre B de

$$\text{rayon } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5. \quad BD' \times AD = 1 \text{ or } AD = \sqrt{2} \text{ donc } BD' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$BE' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{BD'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AD}) + k_1 \times 2\pi$$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) + k_2 \times 2\pi$$

$$\text{donc } (\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) - (\vec{u}, \overrightarrow{BD'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AE}) + k \times 2\pi$$

$$(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) = (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) + k \times 2\pi$$

or le triangle ADE étant équilatéral direct, $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{3}$

$$\text{donc } (\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$$

Le triangle $BD'E'$ est isocèle avec un angle de $\frac{\pi}{3}$ donc est équilatéral

$(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$ donc le triangle $BD'E'$ est équilatéral indirect.

