Exercice

$ABCD$ est un carré tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Les points I et J sont placés de sorte que BIC et CDJ soient des triangles équilatéraux directs.

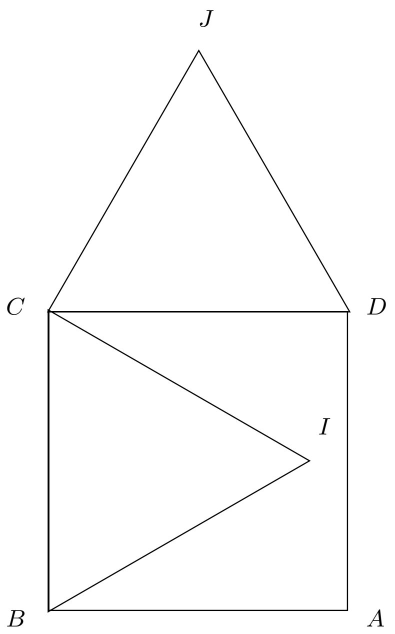
1. (a) Faire une figure.
   (b) Quelles sont les longueurs égales apparaissant sur cette figure ?

2. (a) Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DA}}\right)$ puis $\widehat{ADJ}$.
   (b) Justifier que $\widehat{DAJ} = \widehat{DJA}$ et calculer $\widehat{DAJ}$.
   (c) En déduire la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AJ}\right)$.

3. (a) Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BI}}\right)$ puis $\widehat{ABI}$.
   (b) Justifier que $\widehat{BAI} = \widehat{BIA}$ et calculer $\widehat{BAI}$.
   (c) En déduire la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right)$.

4. (a) Calculer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}\right)$.
   (b) Que peut-on alors dire des points A, I et J ?

1. (a)



   (b) Comme $ABCD$ est un carré, on a $AB = BC = CD = DA$.
   Comme les triangles CBI et CDJ sont équilatéraux, on a de plus $CB = BI = IC$ et $CD = DJ = JC$.

   Par conséquent, $AB = BC = CD = DA = BI = IC = DJ = JC$.

2. (a) D'après la relation de Chasles, $\left(\widehat{\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}}\right)$ $[2\pi]$.

D'après la figure, $\left(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ comme $ABCD$ est un carré.

De même, $\left(\widehat{\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ comme CDJ est équilatéral direct.

Il s'ensuit que $\left(\widehat{\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DA}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$ et donc $\widehat{ADJ} = \frac{5\pi}{6}$.

(b) Comme $DA = DJ$, le triangle ADJ est isocèle en D d'où $\widehat{DAJ} = \widehat{DJA}$.

De plus, la somme des mesures des trois angles du triangle ADJ vaut π.

Ainsi $\widehat{ADJ} + \widehat{DAJ} + \widehat{DJA} = \pi$ soit $\frac{5\pi}{6} + 2\widehat{DAJ} = \pi$ d'où $\widehat{DAJ} = \frac{\pi}{12}$.

(c) D'après le dessin, l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AJ}\right)$ est dans le sens direct.

Sa mesure principale est donc $\widehat{DAJ} = \frac{\pi}{12}$.

3. (a) D'après la relation de Chasles, $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BI}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}}\right)$ $[2\pi]$.

D'après la figure, $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ comme $ABCD$ est un carré.

De même, $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ comme BIC est équilatéral direct.

Il s'ensuit que $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BI}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$ et donc $\widehat{ABI} = \frac{\pi}{6}$.

(b) Comme $BA = BI$, le triangle ABI est isocèle en B, d'où $\widehat{BAI} = \widehat{BIA}$.

De plus, la somme des mesures des trois angles du triangle ABI vaut π.

Ainsi $\widehat{ABI} + \widehat{BIA} + \widehat{BAI} = \pi$ soit $\frac{\pi}{6} + 2\widehat{BAI} = \pi$ d'où $\widehat{BAI} = \frac{5\pi}{12}$.

D'après le dessin, l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right)$ est dans le sens indirect.

Sa mesure principale est donc $-\widehat{BAI} = -\frac{5\pi}{12}$.

4. (a) D'après la relation de Chasles, $\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}\right)$ $[2\pi]$.

Par hypothèse, $\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

De plus, on vient de voir que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}\right) \equiv -\frac{5\pi}{12}$ $[2\pi]$.

Il s'ensuit que $\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} \equiv \frac{\pi}{12}$ $[2\pi]$.

Ainsi, l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}\right)$ a pour mesure principale $\frac{\pi}{12}$.

(b) Comme $\left(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AJ}}\right) \equiv 0\,[2\pi]$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires (et de même sens), ce qui signifie que les points A, I et J sont alignés.