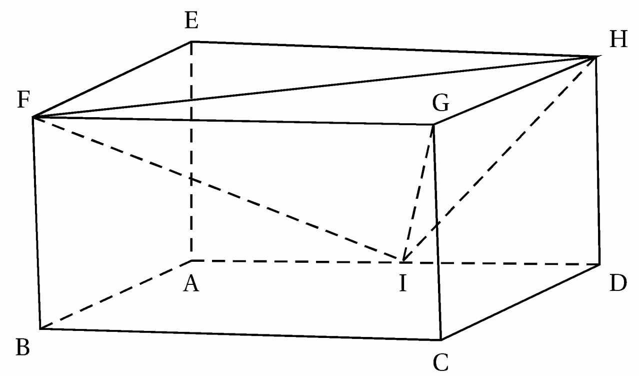
Amérique du Sud novembre 2008

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit ABCDEFGH tel que : AB = 1, AD = 2 et AE = 1.
On appelle I le milieu de [AD].



L'espace est muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.

2. *a.* Montrer que le volume V du tétraèdre GFIH est égal à $\frac{1}{3}$.

b. Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.
En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance *d* du point G au plan (FIH).

3. Soit le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (2 ; 1 ; −1).

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (FIH).
b. En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).
c. Retrouver par une autre méthode la distance *d* du point G au plan (FIH).

4. *a.* La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?
b. Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.
c. Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).

5. *Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*
Soit Γ la sphère de centre G passant par K.
Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ?
(On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection)

CORRECTION

1. AB = AB + AE donc F a pour coordonnées (1 ; 0 ; 1)

AG = AB + 2 AI + AE donc G a pour coordonnées (1 ; 2 ; 1)

AH = 2 AI + AE donc H a pour coordonnées (0 ; 2 ; 1)

2. *a.* La base du tétraèdre GFIH est le triangle FGH d'aire A = $\frac{1}{2} \times$ FG $\times$ GH = $\frac{1}{2} \times 2 = 1$

La hauteur du tétraèdre GFIH relative à cette base est [IJ] où J est le projeté orthogonal de I sur le plan (FGH) donc J est le milieu de [EH] donc $h = 1$

Le volume V du tétraèdre GFIH est égal à $\frac{1}{3} \times A \times h = \frac{1}{3}$

b. F a pour coordonnées (1 ; 0 ; 1) ; I (0 ; 1 ; 0) donc FI (– 1 ; 1 ; – 1) donc $FI^2 = 3$
H a pour coordonnées (0 ; 2 ; 1) donc HI (0 ; 1 ; 1) donc $HI^2 = 2$;
FH a pour coordonnées (– 1 ; 2 ; 0) donc $FH^2 = 5$ donc $FH^2 = FI^2 + IH^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle FIH est rectangle en I.

L'aire du triangle FIH est égale à A' = $\frac{1}{2} \times FI \times IH = \frac{\sqrt{6}}{2}$, soit *d* la distance du point G au plan (FIH).

V = $\frac{1}{3}$ A' $\times d = \frac{1}{3}$ soit $\frac{\sqrt{6}}{2} d = 1$ donc $d = \frac{2}{\sqrt{6}}$

3. *a.* IF est le vecteur de coordonnées (1 ; – 1 ; 1) donc $\vec{n}$. IF = $2 \times 1 - 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0$

IH est le vecteur de coordonnées (0 ; 1 ; 1)donc $\vec{n}$. IH = $2 \times 0 + 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires IF et IH donc le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (FIH).

b. le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (FIH) donc équation cartésienne du plan (FIH) est de la forme $2x + y - z + d = 0$
I ∈ (FIH) donc $2 \times 0 + 1 - 0 + d = 0$ donc $d = -1$
Une équation cartésienne du plan (FIH) est $2x + y - z - 1 = 0$

c. La distance du point G au plan d'équation a $x + b y + c z + d = 0$ est $d = \frac{| a\, x_G + b\, y_G + c\, z_G + d |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

donc $d = \dfrac{|\,2\times 1+2-1-1\,|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

4. *a.* $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées (1 ; 2 ; 1) donc n'est pas colinéaire à $\vec{n}$ vecteur normal au plan (FIH) donc (AG) n'est pas perpendiculaire au plan (FIH).

b. M ∈ (AG) ⇔ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AG}$ ⇔ $\begin{cases} x = k \\ y = 2k \\ z = k \end{cases}$ ($k \in \mathbb{R}$).

c. Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).

K ∈ (AG) ⇔ il existe un réel k tel que K $\begin{cases} x = k \\ y = 2k \\ z = k \end{cases}$

K ∈(FIH) ⇔ $2x + y - z - 1 = 0$

donc les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH) vérifient $\begin{cases} x = k \\ y = 2k \\ z = k \end{cases}$ et $2k + 2k - k - 1 = 0$

soit $\begin{cases} x = k \\ y = 2k \\ z = k \end{cases}$ et $2k = 1$ ⇔ K $\left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$.

5. Le rayon de la sphère est GK or $\overrightarrow{GK}$ $\left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{2}{3} - 2 ; \dfrac{1}{3} - 1\right)$ soit $\left(\dfrac{1}{3} ; -\dfrac{4}{3} ; -\dfrac{2}{3}\right)$ donc $GK^2 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{16}{9} + \dfrac{4}{9} = \dfrac{7}{3}$

soit un rayon R = $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$

La distance de G au plan (FIH) est $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ or $\sqrt{\dfrac{2}{3}} < \sqrt{\dfrac{7}{3}}$ donc la sphère coupe le plan (FIH) suivant un cercle.

<u>Pas demandé : déterminer le centre et le rayon du cercle :</u>

Le centre du cercle intersection de la sphère (S) et du plan (FIH) est Ω projection orthogonale de G sur (FIH),
Pour déterminer le point Ω, il suffit de :

- déterminer la droite orthogonale en G à (FIH)
- son point d'intersection avec le plan (FIH) d'où le point Ω

Pour déterminer le rayon R du cercle
M étant un point du cercle, le triangle ΩMG est rectangle en Ω donc $\Omega M^2 + \Omega G^2 = MG^2$

ΩM = R ; ΩG = $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ et MG = $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ donc $\Omega M^2 = \dfrac{7}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$, le cercle est de rayon $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

En cliquant sur le graphique puis en maintenant le clic droit enfoncé, il est possible de faire pivoter le pavé droit.
Le sphère et le cercle intersection de (FIH) et de (S) sont représentés