Amérique du Sud novembre 2014

On désire réaliser un portail comme indiqué à l'annexe 1. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.

Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)e^{-4x} + b \text{ où } b \text{ est un nombre réel.}$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2].

1\. *a*. Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 2].

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2].

2\. Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5 m.

Dans la suite la fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)e^{-4x} + \frac{5}{4}$.

Partie B : détermination d'une aire

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à 0,05 m de hauteur du sol.

1\. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $F(x) = \left(-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right)e^{-4x} + \frac{5}{4}x$ est une primitive de la fonction f .

2\. En déduire l'aire en m^2 de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire. (On s'intéresse ici à l'objet « vantail » sans faire référence à son environnement).

Partie C : utilisation d'un algorithme

On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur 0,12 m, espacées de 0,05 m. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail (voir l'annexe 2 de l'exercice 4) et le bas de chaque planche à 0,05 m de hauteur. Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.

1\. Donner l'aire de la planche numéro k.

2\. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

Variables	Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation	On affecte à S la valeur 0
Traitement	Tant Que X + 0,17 < ...
	S prend la valeur S + ...
	X prend la valeur X + 0,17
	Fin de Tant Que
Affichage :	On affiche S

CORRECTION

Partie A : Modélisation de la partie supérieure du portail

1. *a.* Pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 2], soit $\begin{cases} u(x) = x + \dfrac{1}{4} & u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-4x} & v'(x) = -4\,\mathrm{e}^{-4x} \end{cases}$ donc

$f'(x) = \mathrm{e}^{-4x} - 4\left(x + \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} = -4x\,\mathrm{e}^{-4x}$

b. La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc $f'(x)$ a le même signe que $-4x$ donc pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 2], $f'(x) \leq 0$. f est décroissante sur [0 ; 2].

2. f est décroissante sur [0 ; 2] donc son maximum est atteint en 0 et est égal à $f(0) = \dfrac{1}{4} + b = \dfrac{3}{2}$ donc $b = \dfrac{5}{4}$

$f(x) = \left(x + \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{5}{4}$.

Partie B : détermination d'une aire

1. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 2], soit $\begin{cases} u(x) = -\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8} & u'(x) = -\,1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-4x} & v'(x) = -4\,\mathrm{e}^{-4x} \end{cases}$ alors :

$F'(x) = -\,\mathrm{e}^{-4x} - 4\left(-\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8}\right)\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{5}{4} = \left(x + \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{5}{4} = f(x)$ donc F est une primitive de f sur [0 ; 2].

2. La fonction f est positive sur [0 ; 2] donc l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe est $A_1 = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

$A_1 = F(2) - F(0)$ or $F(2) = -\dfrac{5}{8}\mathrm{e}^{-2} + \dfrac{5}{2}$ et $F(0) = -\dfrac{1}{8}$ donc $A_1 = -\dfrac{5}{8}\mathrm{e}^{-2} + \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{8} = -\dfrac{5}{8}\mathrm{e}^{-2} + \dfrac{21}{8}$ *u. a.*

Le bord inférieur du vantail est à 0,05 m de hauteur du sol donc l'aire A d'un vantail est égale en m^2 à :

$A = A_1 - 0{,}05 \times 2$ soit $A = -\dfrac{5}{8}\mathrm{e}^{-2} + \dfrac{101}{40}$ *u. a.* soit environ 2,52 m^2.

Partie C : utilisation d'un algorithme

1. On considère la planche numéro k (planche hachurée) :

Sa largeur est : 0,12.

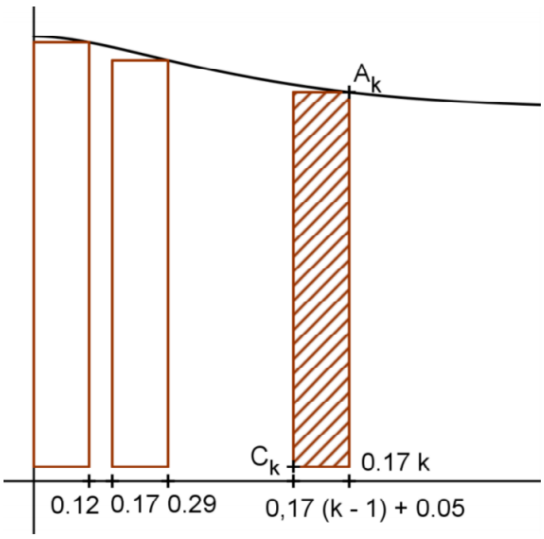
Chaque planche a pour largeur 0,12 m et il existe un espace entre deux planches donc les abscisses des points A_k sont espacées de 0,17 donc A_k a pour abscisse 0,17 k.

La planche est à 0,05 du sol donc sa longueur est égale à l'ordonnée de $y_{A_k} - 0{,}05$ soit $f(0{,}17\,k) - 0{,}05$.

Son aire est donc égale à $0{,}12\,[\,f(0{,}17\,k) - 0{,}05\,]$.

$A = 0{,}12\left(\left(0{,}17\,k + \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-0{,}68\,k} + \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{20}\right)$

$A = 0{,}12\left(\left(0{,}17\,k + \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-0{,}68\,k} + \dfrac{6}{5}\right)$



2.

Variables	Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation	On affecte à S la valeur 0
Traitement	Tant Que X + 0,17 < 2
	S prend la valeur S + $0{,}12\left(\left(0{,}17\,k + \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-0{,}68\,k} + \dfrac{6}{5}\right)$
	X prend la valeur X + 0,17
	Fin de Tant Que
Affichage :	On affiche S