Amérique du Sud novembre 1999
Partie A

Soit la fonction f définie sur] 0 ; + ∞ [par : $f(x) = x^2 + x - \dfrac{1+\ln x}{x}$.

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. On considère la fonction auxiliaire φ définie sur] 0 ; + ∞ [par : $\varphi(x) = 2x^3 + x^2 + \ln x$.

a. Étudier le sens de variations de φ.

b. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution unique qu'on appellera α. Trouver le nombre entier naturel p tel que : $p \times 10^{-2} \leq \alpha < (p+1) \times 10^{-2}$.

c. En déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

2. *a.* Déterminer la limite de la fonction f en + ∞.

b. Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative C ?

c. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

d. Soit la fonction g définie sur] 0 ; + ∞ [par $g(x) = x^2 + x$.

On appelle Γ sa courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Préciser les positions relatives des courbes C et Γ.

e. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	0,2	0,4	2	2,5
$f(x)$									

Les valeurs de $f(x)$ seront données à 10^{-2} près.

***f*.** Tracer C et Γ.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : 4 cm.

À tout point M d'affixe non nulle z, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = z^2 + z - \dfrac{1+\ln|z|}{z}$.

On dit que M' est l'image de M.

1. On considère les points P et Q d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et i.

Calculer les affixes des images P' et Q' de ces points. Placer P, Q, P' et Q'.

2. *a.* Δ est la demi-droite constituée des points d'affixe réelle strictement positive.

Soit M un point de Δ, d'affixe x. Quelle est l'affixe de son image M' ?

b. En utilisant le tableau des variations de la fonction f, indiquer la valeur de x pour laquelle l'abscisse de M' est minimum.

c. Définir et représenter l'ensemble Δ' des points M' lorsque M décrit la demi-droite Δ.

3. Le point M décrit maintenant le cercle E de centre O et de rayon 1.

On note θ un argument de z, θ décrivant $[-\pi ; \pi]$.

a. Montrer qu'une représentation paramétrique de l'ensemble E' des points M' est : $\begin{cases} x(\theta) = \cos 2\theta \\ y(\theta) = \sin 2\theta + 2\sin\theta \end{cases}$.

b. Que peut-on dire des points E' de paramètres respectifs θ et − θ ?

En déduire qu'il suffit de construire la partie E' correspondant à l'ensemble [0 ; π] des valeurs de θ (partie qu'on désignera par E'_1 pour obtenir E'.

c. Étudier conjointement les variations sur l'intervalle [0 ; π] des fonctions x et y.

d. Préciser les points d'intersection de E'_1 avec chacun des axes de coordonnées.

e. Déterminer les points où E'_1 admet une tangente parallèle à l'un des axes de coordonnées. On admet qu'au point correspondant à la valeur π du paramètre, E'_1 admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

***f*.** Tracer E' en utilisant avec précision les éléments obtenus précédemment.

CORRECTION

Partie A

1. *a.* φ est définie dérivable sur] 0 ; + ∞ [et $\varphi'(x) = 6x^2 + 2x + \dfrac{1}{x}$.

$x > 0$ donc $\varphi'(x)$ est la somme de nombres strictement positifs donc $\varphi'(x) > 0$.
φ est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [.

b. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty$

$\varphi(x) = x^3\left(2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x^3}\right)$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^3} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x^3}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$

La fonction φ est continue strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [, φ(] 0 ; + ∞ [) = ℝ, 0 ∈ ℝ donc l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution unique α.
$\varphi(0,54) \approx -0,01$ et $\varphi(0,55) \approx 0,04$ or φ est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [donc $0,54 < \alpha < 0,55$ donc $p = 54$

c. φ est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [et φ(α) = 0 donc :
si $x \in]\,0 ; \alpha\,[$, $\varphi(x) < 0$; si $x = \alpha$ alors $\varphi(x) = 0$ et si $x \in]\,\alpha ; +\infty\,[$, alors $\varphi(x) > 0$

2. *a.* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. $f(x) = x^2 + x - \dfrac{1}{x}(1 + \ln x)$ or $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{1}{x}(1 + \ln x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ la courbe représentative C admet pour asymptote la droite d'équation $x = 0$.

c. $f'(x) = 2x + 1 - \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1(1 + \ln x)}{x^2}$ donc $f'(x) = 2x + 1 - \dfrac{1 - 1 - \ln x}{x^2}$

$f'(x) = 2x + 1 + \dfrac{\ln x}{x^2}$ donc $f'(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 + \ln x}{x^2} = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $\varphi(x)$.

x	0		α		+ ∞
$f'(x)$			0		
f		+ ∞ ↘	$f(\alpha)$	↗ + ∞	

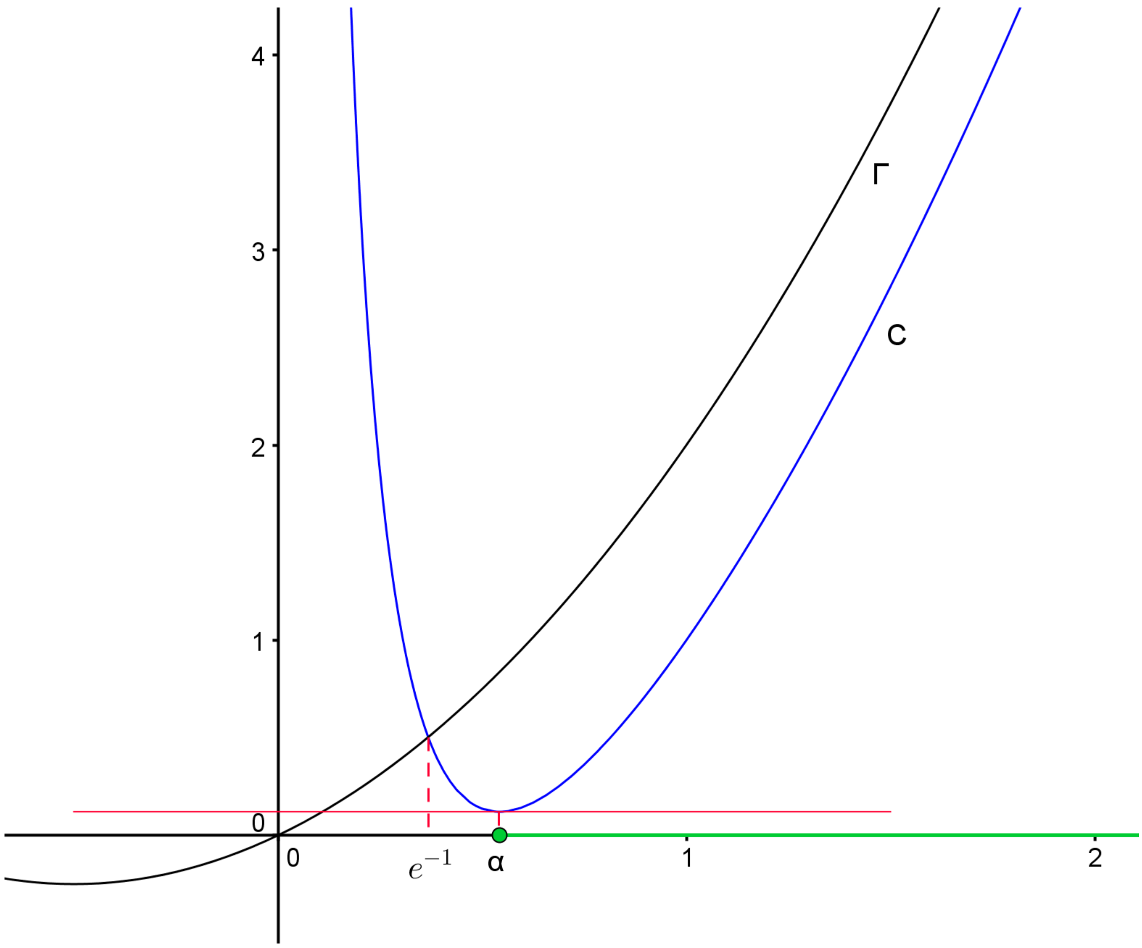
d. $f(x) - g(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$; $1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$

x	0	e^{-1}	+ ∞
$f(x) - g(x)$	–	0	+
position relative	C au dessus de Γ	point d'intersection	C en dessous de Γ

e.

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	0,2	0,4	2	2,5
$f(x)$	3,29	0,35	0,14	0,47	1,	3,29	0,35	5,15	7,98

***f*.**



Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$. Unité graphique : 4 cm.

À tout point M d'affixe non nulle z, on associe le point M ' d'affixe z' tel que : $z' = z^2 + z - \dfrac{1+\ln|z|}{z}$.

On dit que M ' est l'image de M.

On considère les points P et Q d'affixes respectives $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et i.

1. P' a pour affixe $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} - \dfrac{1+\ln\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right|}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ est un complexe de module 1 donc $1+\ln\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right| = 1$ donc l'affixe de P' est $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

soit $\mathrm{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ soit $(1+\sqrt{2})\,\mathrm{i}$

Q' a pour affixe $\mathrm{i}^2 + \mathrm{i} - \dfrac{1+\ln|\mathrm{i}|}{\mathrm{i}}$

i est un complexe de module 1 donc $\dfrac{1+\ln|\mathrm{i}|}{\mathrm{i}} = \dfrac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ donc l'affixe de P' est $-1 + \mathrm{i} + \mathrm{i} = -1 + 2\,\mathrm{i}$

2. *a.* Δ est la demi-droite constituée des points d'affixe réelle strictement positive.

M ' a pour affixe $x^2 + x - \dfrac{1+\ln|x|}{x}$ or $x > 0$ donc $|x| = x$ donc M ' a pour affixe $f(x)$

b. D'après le tableau des variations de la fonction f, l'abscisse de M ' est minimum pour $x = \alpha$.

c. l'ensemble Δ' des points M ' lorsque M décrit la demi-droite Δ est l'ensemble des points d'affixe $f(x)$ donc de coordonnées $(f(x)\,;\,0)$ or pour tout $x > 0$, $f(x) \geq \alpha$ donc Δ' est la partie de l'axe des réels telle que l'abscisse soit supérieure à α (en vert sur le graphique).

3. Le point M décrit le cercle E de centre O et de rayon 1 donc il existe un réel θ décrivant $[-\pi\,;\pi]$ tel que l'affixe de M est $z = e^{i\theta}$.

a. M ' a pour affixe ${e^{i\theta}}^{2} + e^{i\theta}\, e^{i\frac{\pi}{4}} - \dfrac{1+\ln\left|e^{i\theta}\right|}{e^{i\theta}}$

$e^{i\theta}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ est un complexe de module 1 donc $1+\ln\left|e^{i\theta}\right| = 1$ donc l'affixe de M ' est $e^{2i\theta} + e^{i\theta} - e^{-i\theta}$

soit cos 2 θ + i sin 2 θ + 2 cos θ donc l'ensemble E' des points M 'est : $\begin{cases} x(\theta) = \cos 2\,\theta \\ y(\theta) = \sin 2\,\theta + 2\sin\theta \end{cases}$, θ décrivant $[-\pi\,;\pi]$.

b. Soit M_θ le point de E' de paramètre θ, M_θ a pour coordonnées $\begin{cases} x(\theta) = \cos 2\,\theta \\ y(\theta) = \sin 2\,\theta + 2\sin\theta \end{cases}$

$M_{-\theta}$ le point de E' de paramètre – θ, $M_{-\theta}$ a pour coordonnées $\begin{cases} x(-\theta) = \cos(-2\,\theta) \\ y(-\theta) = \sin(-2\,\theta) + 2\sin(-\theta) \end{cases}$ soit $\begin{cases} x(-\theta) = \cos 2\,\theta \\ y(-\theta) = -\sin 2\,\theta - 2\sin\theta \end{cases}$

M_θ et $M_{-\theta}$ ont la même abscisse et des ordonnées opposées doc sont symétriques par rapport à l'axe des réels.
Il suffit de construire la partie E' correspondant à l'ensemble [0 ; π] des valeurs de θ puis par symétrie par rapport à l'axe des réels on obtient la partie correspondant à $\theta \in [-\pi\,;\pi]$.

c. $x'(\theta) = -2\sin 2\,\theta$, si θ = 0 ou $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou θ = π alors sin 2 θ = 0

si $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $2\,\theta \in]0\,;\pi[$ donc sin 2 θ > 0 donc $x'(\theta) < 0$;

si $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$, $2\,\theta \in]\pi\,;2\,\pi[$ donc sin 2 θ < 0 donc $x'(\theta) > 0$;

$y'(\theta) = 2\cos 2\,\theta + 2\cos\theta = 2\,[\cos 2\,\theta + \cos\theta] = 2\,[2\cos^2\theta + \cos\theta - 1]$
– 1 est solution de $2\,x^2 + x - 1 = 0$ donc $2\,x^2 + x - 1 = (x+1)(2\,x-1)$
$y'(\theta) = 2(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1)$

si $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ donc 2 cos θ – 1 = 0

si $\theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right[$, $\frac{1}{2} < \cos\theta \le 1$ donc 2 cos θ – 1 > 0 ; si $\theta \in \left]\frac{\pi}{3}\,;\pi\right]$, $-1 \le \cos\theta < \frac{1}{2}$ donc 2 cos θ – 1 < 0

pour tout $\theta \in [0\,;\pi[$, cos θ > – 1 donc cos θ + 1 > 0
si θ = π alors cos θ = – 1 donc cos θ + 1 = 0

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		π
2 cos θ – 1	0	+	0	–	
cos θ + 1		+		+	0
$y'(\theta)$	0	+	0	–	0

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(\theta)$	0	–		–	0	+	0
x	1	↘	$-\frac{1}{2}$	↘	– 1	↗	1
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	2	↘	0
$y'(\theta)$	0	+	0	–	0	–	0

d. Préciser les points d'intersection de E'_1 avec chacun des axes de coordonnées.
E'_1 coupe l'axe des abscisses quand $\theta \in [0\,;\pi]$ et sin 2 θ + 2 sin θ = 0 ⇔ $\theta \in [0\,;\pi]$ et 2 sin θ cos θ + 2 sin θ = 0
⇔ $\theta \in [0\,;\pi]$ et 2 sin θ (cos θ + 1) = 0 ⇔ θ = 0 ou θ = π
or le point de paramètre θ = 0 et le point de paramètre θ = π, sont confondus : il s'agit du point O(0 ; 0).

E'_1 coupe l'axe des ordonnées quand $\theta \in [0\,;\pi]$ et cos 2 θ = 0 ⇔ $2\,\theta \in [0\,;2\,\pi]$ et $2\,\theta = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ ⇔ $2\,\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $2\,\theta = \frac{3\,\pi}{2}$

⇔ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{3\,\pi}{4}$

Le point de paramètre $\theta = \frac{\pi}{4}$ a pour ordonnée $y = \sin\frac{\pi}{2} + 2\sin\frac{\pi}{4} = 1 + \sqrt{2}$

Le point de paramètre $\theta = \frac{3\pi}{4}$, a pour ordonnée $y = \sin\frac{3\pi}{2} + 2\sin\frac{3\pi}{4} = -1 + \sqrt{2}$

E'$_1$ coupe l'axe des ordonnées en A $(0, 1 + \sqrt{2})$ et B $(0 ; -1 + \sqrt{2})$.

e. La tangente au point M de paramètre θ, $\theta \in [0 ; \pi]$ a pour vecteur directeur $\vec{t} = x'(\theta)\,\vec{i} + y'(\theta)\,\vec{j}$ quand $x'\theta)$ et $y'(\theta)$ ne sont pas simultanément nuls donc quand $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$
Il est admis qu'au point correspondant à la valeur π du paramètre, E'$_1$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
et qu'au point correspondant à la valeur 0 du paramètre, E'$_1$ admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

$x'(\theta)\,\vec{i} + y'(\theta)\,\vec{j} = -2\sin 2\theta\,\vec{i} + 2(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1)\,\vec{j}$

Le vecteur $\vec{t}$ est colinéaire à $\vec{i}$ si et seulement si $\theta \in]0 ; \pi[$ et $2(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$ soit si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{3}$.

donc en C(1 ; 0) et en D $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, E'$_1$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Le vecteur est $\vec{t}$ colinéaire à $\vec{j}$ si et seulement si $\theta \in]0 ; \pi[$ et $\sin 2\theta = 0$ soit si et seulement si $\theta \in]0 ; \pi[$ et $2\theta = k\pi$

soit $\theta = \frac{\pi}{2}$, donc en F $(-1 ; 2)$, E'$_1$ admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

***f*.**

θ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	$\frac{\pi}{3}$	1,2	1,4	$\frac{\pi}{2}$	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	π
$x(\theta)$	1	0,9	0,7	0,4	0	– 0,5	– 0,7	– 0,9	– 1	– 0,9	– 0,7	– 0,3	0,1	0,5	0,8	1
$y(\theta)$	0	0,8	1,5	2,1	2,4	2,6	2,5	2,3	2	1,5	1,1	0,7	0,4	0,1	0,04	0