France septembre 2006

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

A - Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.

Pour $i = 1$ ou $i = 2$, on note E_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Est le i-ème jour » et E_2 l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Ouest le i-ème jour »

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.
2. Déterminer les probabilités suivantes: $p(E_1)$; $p_{E_1}(E_2)$; $p(E_1 \cap E_2)$.
3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

B - On suppose maintenant que n touristes ($n \geq 3$) se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

1. Déterminer la probabilité que k touristes ($0 \leq k \leq n$) partent en direction de l'Est.
2. On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est heureux s'il se retrouve seul sur une plage.

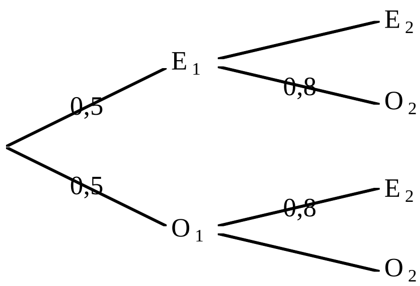
a. Peut-il y avoir deux touristes heureux ?

b. Démontrer que la probabilité (notée p) qu'il y ait un touriste heureux parmi ces n touristes vaut : $p = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

c. Application numérique : Lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.

CORRECTION

A. 1.



2. Le premier jour, le touriste choisi au hasard l'une des deux directions donc : $p(E_1) = \dfrac{1}{2}$.

Sachant que le premier jour le touriste a choisi la plage de l'Est, la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille (donc la plage de l'Ouest) vaut 0,8 donc $p(O_2 / E_1) = 0{,}8$

il s'ensuit que $p(E_2 / E_1) = 1 - p(O_2 / E_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

donc $p(E_2 \cap E_1) = p(E_2 / E_1) \times p(E_1) = 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}1$.

3. On a de même $p(O_1) = \dfrac{1}{2}$ et $p(E_2 / O_1) = 0{,}8$ donc $p(O_2 / O_1) = 0{,}2$ donc

$p(O_2 \cap O_1) = p(O_2 / O_1) \times p(O_1) = 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}1$

l'événement « le touriste se rendre sur la même plage les deux jours consécutifs » est la réunion de deux événements incompatibles : « le touriste se rend deux jours consécutifs sur la plage de l'Est » (événement $E_2 \cap E_1$) ou « le touriste se rend deux jours consécutifs sur la plage de l'Ouest » (événement $O_2 \cap O_1$) donc la probabilité demandée est : $p = p(E_2 \cap E_1) + p(O_2 \cap O_1) = 0{,}2$.

B. 1. On a une succession de n expériences aléatoires identiques et indépendantes (le touriste choisi au hasard l'une des deux directions), chaque expérience à deux issues :

- succès : le touriste part en direction de l'Est ($p = 0{,}5$)
- échec : le touriste part en direction de l'Ouest ($q = 1 - p = 0{,}5$)

donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de touristes choisissant la plage de l'Est suit une loi binomiale de paramètres n ; 0,5.

2. S'il existe un touriste heureux, il se trouve seul sur une plage et donc les $n - 1$ autres touristes se trouvent sur l'autre plage, or $n \geq 3$ donc sur l'autre plage, il y a au moins deux touristes. Il ne peut donc pas y avoir de touristes heureux simultanément.

3. L'événement « il existe un touriste heureux parmi ces n touristes » est la réunion de deux événements incompatibles.

Le premier : « un seul touriste a choisi la plage de l'Est »

le second : « un seul touriste a choisi la plage de l'Ouest » ou encore « $n - 1$ touristes ont choisi la plage de l'Est ».

La probabilité du premier événement est : $p(X = 1) = \binom{n}{1} \times \left(\dfrac{1}{2}\right) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ or $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1! \times (n-1)!} = n$ donc $p(X = 1) = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{n}{2^n}$

la probabilité du second événement est : $p(X = n - 1) = \binom{n}{n-1} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)$ or $\binom{n}{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)! \times 1!} = n$

donc $p(X = n - 1) = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{n}{2^n}$ donc $p = \dfrac{n}{2^n} + \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{2n}{2^n}$ donc $p = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

c. Si $n = 10$, $p = \dfrac{10}{2^9} \approx 0{,}02$.