ENONCE

Asie juin 2007

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à proposer un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Soit f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [− 1 ; 1], dont la dérivée est continue sur cet intervalle.

Si $f(-1) = -f(1)$, alors : $\int_{-1}^{1} t\ f'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$

2. Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle [0 ; 3].

Si $\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^3 g(t)\,\mathrm{d}t$, alors pour tout nombre réel x appartenant à [0 ; 3] : $f(x) \leq g(x)$.

CORRECTION

1. Soit f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [− 1 ; 1], dont la dérivée est continue sur cet intervalle.

Si $f(-1) = -f(1)$, alors : $\int_{-1}^{1} t\ f'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$

Par intégration par parties

on pose $u'(t) = f'(t)$ $\quad u(t) = f(t)$

$v(t) = t$ $\quad v'(t) = 1$

$$\int_{-1}^{1} t\ f'(t)\,\mathrm{d}t = [t\ f(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{-1}^{1} t\ f'(t)\,\mathrm{d}t = f(1) + f(-1) - \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

or $f(1) + f(-1) = 0$ donc $\int_{-1}^{1} t\ f'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$

VRAI

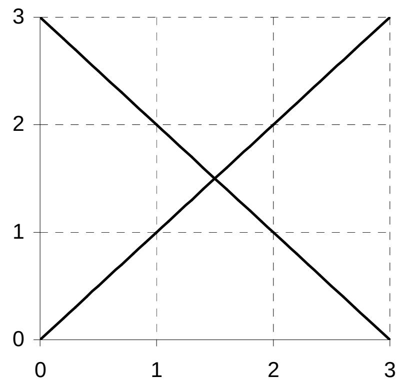
2. Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle [0 ; 3].

Si $\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^3 g(t)\,\mathrm{d}t$, alors pour tout nombre réel x appartenant à [0 ; 3] : $f(x) \leq g(x)$.

Soit la fonction f définie par $f(x) = x - 3$ si $0 \leq x \leq 3$

Soit la fonction g définie par $g(x) = x$ si $0 \leq x \leq 3$

f et g sont représentées sur [0 ; 3] par les diagonales du carré de côté 3 unités donc $\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{9}{2}$ et $\int_0^3 g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{9}{2}$



de plus il est impossible d'affirmer que, sur [0 ; 3] $f(x) \leq g(x)$.

FAUX