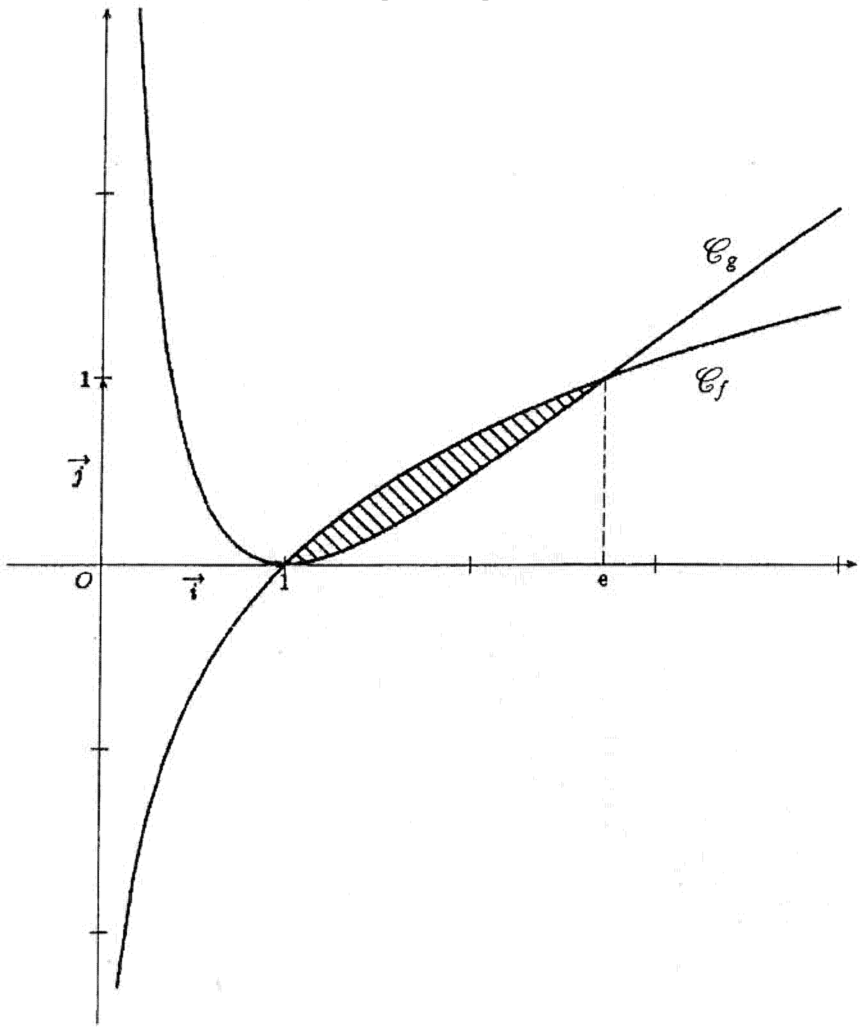
EXERCICE I (5 points)
Commun à tous les candidats

Les courbes C_f et C_g données ci-dessous représentent respectivement dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.

1. On cherche à déterminer l'aire A (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.



On note : $I = \int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x$ et $J = \int_1^e (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x$.

a. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par $F'(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.

b. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = e - 2I$.

c. En déduire J.

d. Donner la valeur de A.

2. Dans cette question Ie candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

Pour x appartenant à l'intervalle $[1\,;e]$, on note M le point de la courbe C_f d'abscisse x et N le point de la courbe C_g de même abscisse.

Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

EXERCICE 2 (5 points)
Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,k)$, on considère les points

A(1, 1, 0) ; B(1, 2, 1) et C(3, – 1, 2).

1. *a*. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Démonter que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$.

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $2y - z - 4 = 0$ et $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.

Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite (D), dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

3. Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) ?

4. Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans I'évaluation.

Déterminer la distance du point A à la droite (D).

EXERCICE 3 (5 points)
Commun à tous les candidats

La durée de vie, exprimée en heures d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout $t \geq 0$, $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx$.

La fonction R définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Restitution organisée de connaissances

a. Démontrer que pour tout $t \geq 0$ on a $R(t) = e^{-\lambda t}$.

b. Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réels $s \geq 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X > t}(X > t + s)$ ne dépend pas du nombre $t \geq 0$.

2. Dans cette question, on prend $\lambda = 0{,}00026$.

a. Calculer $P(X \leq 1000)$ et $P(X > 1000)$.

b. Sachant que l'événement $(X > 1000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'événement $(X > 2000)$.

c. Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

EXERCICE 4 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique: 1 cm).

Soient A, B et I les points d'affixes respectives $1 + i$, $3 - i$ et 2.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$. Le point M′ est appelé l'image de M.

1. Faire une figure sur une feuille de papier millimétré et compléter cette figure tout au long de l'exercice.
2. Calculer les affixes des points A′ et B′, images respectives des points A et B.
   Que remarque-t-on?
3. Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5.

4\. *a*. Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z' + 4 = (z - 2)^2$.

b. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ et, lorsque z est différent de 2, une relation entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.

c. Que peut-on dire du point M′ lorsque M décrit le cercle C de centre I et de rayon 2 ?

5\. Soient E le point d'affixe $2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, J le point d'affixe -4 et E′ l'image de E.

a. Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{IE})$.

b. Calculer la distance JE′ et une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{JE'})$

c. Construire à la règle et au compas le point E ′ ; on laissera apparents les traits de construction.

EXERCICE 4 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ et $z_B = 7 + \frac{7}{2}i$.

1\. On considère la droite(d) d'équation $4x + 3y = 1$.
Démontrer que l'ensemble des points de (d) dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points $M_k(3k + 1, -4k - 1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

2\. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2 ; 3)$

3\. Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe $z' = \frac{2}{3} i z + \frac{1}{3} - \frac{5}{3} i$.

Déterminer l'image de A par s, puis donner la nature et les éléments caractéristiques de s.

4\. On note B_1 l'image de B par s et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s.

a. Déterminer la longueur AB_{n+1} en fonction de AB_n.

b. À partir de quel entier n le point B_n appartient-il au disque de centre A et de rayon 10^{-2} ?

c. Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés.

EXERCICE I (5 points) Commun à tous les candidats

1\. *a*. F est continue, dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et $F'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x = f(x)$ donc F est une primitive de la fonction logarithme népérien.
$I = F(e) - F(1) = e \ln e - e - (\ln 1 - 1) = e - e - (-1)$
donc $I = 1$

b. Soit $u'(x) = 1$ $\quad u(x) = x$
$v(x) = (\ln x)^2$ $\quad v'(x) = \dfrac{2}{x}\ln x$

donc $J = \left[x(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e \dfrac{2}{x}(\ln x) \times x\, dx$

donc $J = e - 2\int_1^e \ln x\, dx$

$J = e - 2I$

c. $J = e - 2I$ or $I = 1$ donc $J = e - 2$

d. Les fonctions f et g sont définies continues et positives sur $[1\,;e]$
I mesure l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$
J mesure l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de g, les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$
f est au-dessus de g sur $[1\,;e]$ donc $A = I - J$
$A = 1 - (e - 2) = 3 - e$

2\. C_f est au dessus de C_g sur $[1\,;e]$
donc $MN = y_M - y_N = f(x) - g(x)$
Soit h la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $h(x) = \ln x - (\ln x)^2$
h est continue, dérivable sur $]0\,;+\infty[$,

$h'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x}\ln x = \dfrac{1 - 2\ln x}{x}$

$1 - 2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x \leq e^{\frac{1}{2}}$ ou encore $0 < x \leq \sqrt{e}$

$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq \sqrt{e}$ et $h'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{e}$

donc h est croissante sur $]0\,;\sqrt{e}\,]$ et décroissante sur $[\sqrt{e}\,;+\infty[$ donc h admet un maximum en $\sqrt{e}$

La distance MN est maximale pour $x = \sqrt{e}$.

Elle est alors égale à $h(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{4}$

EXERCICE 2 (5 points) Commun à tous les candidats

1. *a*. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (0 , 1 , 1) $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (2 , – 2 , 2)
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc A, B, C ne sont pas alignés.

b. Soit Π le plan d'équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$.
En remplaçant (x , y , z) dans l'équation du plan par les coordonnées de A :
$2 \times 1 + 1 - 0 - 3 = 0$ donc A ∈ Π
de même B ∈ Π et C ∈ Π
A, B, C ne sont pas alignés donc déterminent un plan donc Π = (ABC).

2. Un vecteur normal à (P) est $\vec{n}$ de coordonnées (0 ; 2 ; – 1).
Un vecteur normal à (Q) est $\overrightarrow{n'}$ de coordonnées (2 ; 3 ; – 2)
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc (P) et (Q) sont sécants suivant une droite Δ.
Soit M un point de (D), en remplaçant (x , y , z) dans l'équation du plan par les coordonnées de M :
pour tout t réel : $-2 + t + 2 \times 3 - t - 4 = 0$ donc tout point de (D) appartient à (P) donc (D) est une droite de (P)

de même pour (Q) :
pour tout t réel : $2(-2 + t) + 3 \times 3 - 2t - 5 = 0$ donc tout point de (D) appartient à (Q) donc (D) est une droite de (Q)
L'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D)

3. L'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D) donc l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) est aussi l'intersection de (D) et (ABC)
L'intersection de (D) et (ABC) est le point M '($-2 + t$; 3 ; t) tel que $2x + y - z - 3 = 0$.
En remplaçant : $2(-2 + t) + 3 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 4$
En remplaçant : M (2 ; 3 ; 4)
l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) est le point de coordonnées (2 ; 3 ; 4).

4. Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}$ (1 ; 0 ; 1)
le plan orthogonal (R) à (D) en A a une équation de la forme :

$$x + z + d = 0$$

A ∈ (R) donc $1 + d = 0$ soit $d = -1$
(R) a pour équation $x + z - 1 = 0$
L'intersection H de (D) et (R) est le point tel que $x + z - 1 = 0$ et de coordonnées de la forme ($-2 + t$; 3 ; t)
En remplaçant : $-2 + t + t - 1 = 0$ donc $t = \dfrac{3}{2}$ donc H a pour coordonnées (– 0,5 ; 3 ; 1,5)
$AH^2 = (-0{,}5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 + 1{,}5^2 = 8{,}5$ donc la distance du point A à la droite (D) est AH = $\sqrt{8{,}5}$.

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

1. *a*. $P(X \leq t) = \int_0^t e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$
$R(t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})$ donc $R(t) = e^{-\lambda t}$.

b. Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réels $s \geq 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X > t}(X > t + s)$ ne dépend pas du nombre $t \geq 0$.
$t \geq 0$ donc $(X > t + s) \cap (X > t) = (X > t + s)$

$$P_{X>t}(X > t + s) = \frac{P((X > t + s) \cap (X > t))}{p(X > t)} = \frac{P(X > t + s)}{p(X > t)}$$

$$P_{X>t}(X > t + s) = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+s) + \lambda s} = e^{-\lambda s}$$

2. *a*. $P(X \leq 1000) = 1 - e^{-0{,}00026 \times 1000} = 1 - e^{-0{,}26} \approx 0{,}771$
$P(X > 1000) = e^{-0{,}26} \approx 0{,}229$

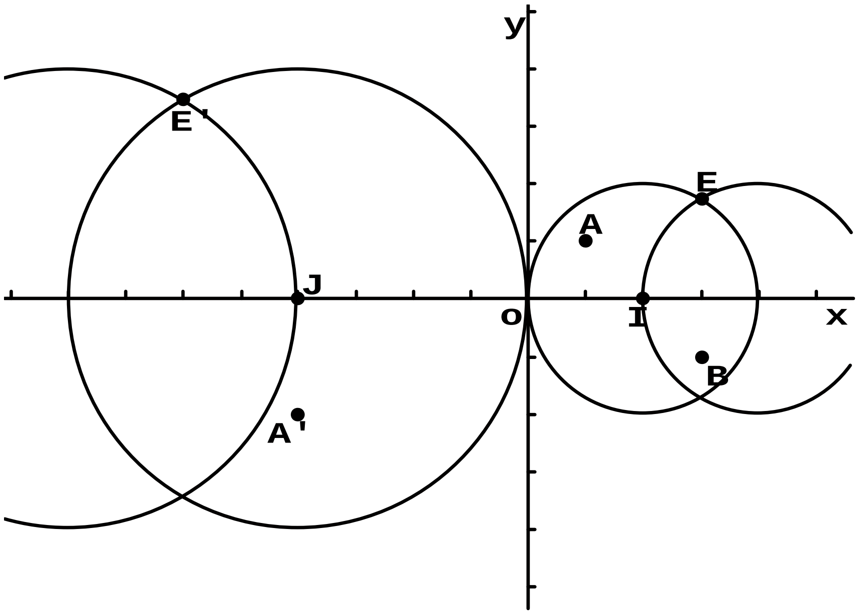
b. $P_{X>t}(X > t + s) = e^{-\lambda s}$ donc en prenant $t = s = 1000$ on obtient $P_{X>1000}(X > 2000) = e^{-0{,}26} \approx 0{,}229$

c. $P_{X>2000}(X \leq 3000) = \dfrac{P((X \leq 3000) \cap (X > 2000))}{p(X > 2000)}$ soit $P_{X>2000}(X \leq 3000) = \dfrac{P(2000 < X \leq 3000))}{p(X > 2000)}$

$P_{X>2000}(X \leq 3000) = \dfrac{1 - e^{-3000\lambda} - (1 - e^{-2000\lambda})}{e^{-2000\lambda}} = \dfrac{e^{-2000\lambda} - e^{-3000\lambda}}{e^{-2000\lambda}} = 1 - e^{-1000\lambda}$ donc $P_{X>2000}(X \leq 3000) = 1 - e^{-0{,}26} \approx 0{,}771$
Ce qui était prévisible, X suit une loi de durée de vie sans vieillissement donc $P_{X>2000}(X \leq 3000) = P_{X>2000}(X \leq 2000 + 1000)$
$P_{X>2000}(X \leq 3000) = P(X \leq 1000) = 1 - e^{-0{,}26} \approx 0{,}771$

EXERCICE 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. .



2. $a' = (1 + i)^2 - 4(1 + i) = 2i - 4 - 4i = -4 - 2i$
$b' = (3 - i)^2 - 4(3 - i) = 8 - 6i - 12 + 4i = -4 - 2i$
$a' = b'$ donc $A' = B'$

3. Il faut résoudre $z^2 - 4z = -5 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 5 = 0$
$\Delta = 16 - 20 = (2i)^2$ donc $z_1 = 2 + i$ et $z_2 = 2 - i$

4. *a*. $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z - 2)^2$

b. $z' + 4 = (z - 2)^2$ donc $|z' + 4| = |z - 2|^2$
$\arg(z' + 4) = 2\arg(z - 2) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

c. Si M décrit le cercle C de centre I et de rayon 2 alors IM = 2 donc $|z - 2| = 2$
donc $|z' + 4| = 4$
M′ décrit le cercle de centre J d'affixe -4 et de rayon 4

5. *a*. $IE = |z - 2| = |2e^{i\frac{\pi}{3}}| = 2$

$(\vec{u}, \overrightarrow{IE}) = \arg 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2k\pi$ donc une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{IE})$ est $\frac{\pi}{3}$.

b. $JE' = |z' + 4| = |z - 2|^2 = 4$

$(\vec{u}, \overrightarrow{JE'}) = \arg(z' + 4) + 2k\pi$ donc une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{JE'})$ est $\frac{2\pi}{3}$.

EXERCICE 4 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Une solution de $4x + 3y = 1$ est $x = 1$ et $y = -1$

donc $4(x-1) + 3(y+1) = 0 \Leftrightarrow 4(x-1) = -3(y+1)$

x et y sont des entiers relatifs et 3 et 4 sont premiers entre eux et 3 divise $4(x-1)$ donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise $x - 1$

Il existe un entier relatif k tel que $x - 1 = 3k$ donc tel que $x = 3k + 1$

$4(x-1) = -3(y+1)$

donc en remplaçant : $4 \times 3k = -3(y+1)$ donc $y + 1 = -4k$ soit $y = -4k - 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Vérification :

Soit $x = 3k + 1$ et $y = -4k - 1$, $4x + 3y = 12k + 4 - 12k - 3 = 1$ donc vérifié.

L'ensemble des points de (d) dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points $M_k(3k+1, -4k-1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

2. $\text{AB} = \left| 7 + \frac{7}{2}\text{i} - 1 + \text{i} \right| = \left| 6 + \frac{9}{2}\text{i} \right| = \sqrt{36 + \frac{81}{4}} = \frac{15}{2}$

$\text{AM}_{-1} = \left| -2 + 3\text{i} - 1 + \text{i} \right| = |-3 + 4\text{i}| = \sqrt{9+16} = 5$ donc $\text{AM}_{-1} = \frac{2}{3}\text{AB}$

le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2\,;3)$ est $\frac{2}{3}$

$\overrightarrow{\text{AM}_{-1}}$ a pour affixe $(-3 + 4\text{i})$; $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour affixe $6 + \frac{9}{2}\text{i} = \frac{3}{2}(4 + 3\text{i})$ donc $(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{AM}_{-1}}) = \arg \dfrac{-3+4\text{i}}{\frac{3}{2}(4+3\text{i})}$

or $(-3 + 4\text{i}) = (4 + 3\text{i})\,\text{i}$ donc $\dfrac{(4+3\text{i})\,\text{i}}{\frac{3}{2}(4+3\text{i})} = \frac{2}{3}\text{i}$ donc $(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{AM}_{-1}}) = \arg \frac{2}{3}\text{i}$ donc $(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{AM}_{-1}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

l'angle de la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2\,;3)$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$

3. A pour affixe $(1 - \text{i})$ donc $s(\text{A})$ a pour affixe $\frac{2}{3}\text{i}(1-\text{i}) + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\text{i}$ soit $\frac{2}{3}\text{i} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\text{i}$ donc $1 - \text{i}$ donc $s(\text{A}) = \text{A}$

L'écriture complexe de s est de la forme $az + b$ (avec $a = \frac{2}{3}\text{i}$) et $s(\text{A}) = \text{A}$ donc s est une similitude directe de centre A

Le rapport de la similitude est $|a|$ donc $\frac{2}{3}$. L'angle de la similitude a pour mesure $\arg a$ donc $\frac{\pi}{2}$.

4. *a*. A est le centre de la similitude et B_{n+1} est l'image de B_n par s donc $\text{AB}_{n+1} = \frac{2}{3}\text{AB}_n$

b. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \text{AB}_n$ et $u_0 = \text{AB}$. D'après la question précédente $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n$ et $u_0 = \frac{15}{2}$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{3}$ de premier terme $\frac{15}{2}$ donc $u_n = \text{AB}_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{15}{2}$

$\text{AB}_n \le 10^{-2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{15}{2} \le 10^{-2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \le \frac{2}{15} \times 10^{-2} \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{2}{3}\right) \le \ln\left(\frac{2}{15} \times 10^{-2}\right)$

$\ln \frac{2}{3} < 0$ donc $\text{AB}_n \le 10^{-2} \Leftrightarrow n \ge \dfrac{\ln\left(\frac{2}{15} \times 10^{-2}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \Leftrightarrow n \ge 17$

c. B_n est l'image de B_1 par s^{n-1}

La composée de similitudes directes de même centre est une similitude directe de même centre, de rapport le produit des rapports et d'angle la somme des angles de ces similitudes.

s^{n-1} est la similitude directe de centre A de rapport $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ d'angle $\frac{(n-1)\pi}{3}$

$(\overrightarrow{\text{AB}_1}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}_n}) = \frac{(n-1)\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

A, B_1 et B_n sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{\text{AB}_1}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}_n}) \equiv 0\ [\pi] \Leftrightarrow \frac{(n-1)\pi}{3} \equiv 0\ [\pi] \Leftrightarrow \frac{(n-1)}{3}$ est un entier relatif $\Leftrightarrow n = 3k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$