

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On nomme (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy) .
2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives $(3; 1; -3)$ et $(-1; 1; 1)$.
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.
 - b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).
3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy) .
4. a. On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.
4. b. M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.

On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et $\text{ppcm}(a; b) = 440$, c'est-à-dire tels que $(a; b)$ soit solution du système (1) :

$$(1) : \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a; b) = 440 \end{cases}$$

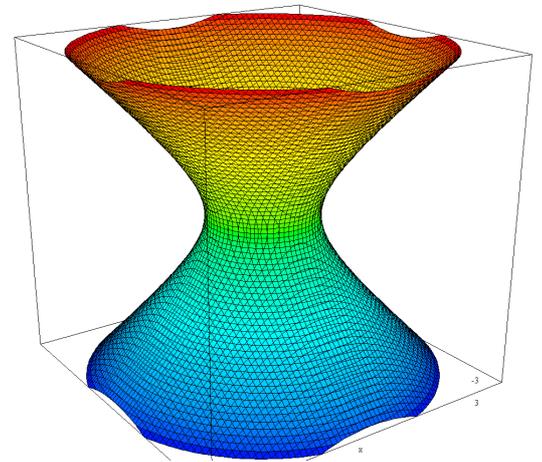
Montrer que si $(a; b)$ est solution de (1) alors $\text{pgcd}(a; b)$ est égal à 1 ou 5.

Conclure.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

CORRECTION

1. Dans la symétrie par rapport au plan (xOy) , le point $M(x; y; z)$ est transformé en le point $M'(x'; y'; z')$ avec $x' = x; y' = y$ et $z' = -z$ donc $x'^2 + y'^2 - z'^2 = x^2 + y^2 - z^2 = 1$ donc $M' \in (S)$
La surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy) .



2. a. Pour tout M de (D) il existe un réel k tel que

$$\overrightarrow{BM} = k \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 4k \\ y - 1 = 0 \\ z - 1 = -4k \end{cases}$$

une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B

$$\text{est donc } \begin{cases} x = 4k - 1 \\ y = 1 \\ z = -4k + 1 \end{cases}$$

- b. Pour tout M de coordonnées $(x; y; z)$ de (D) il existe un réel k tel que $\begin{cases} x = 4k - 1 \\ y = 1 \\ z = -4k + 1 \end{cases}$

$$x^2 + y^2 - z^2 = (4k - 1)^2 + 1 - (-4k + 1)^2$$

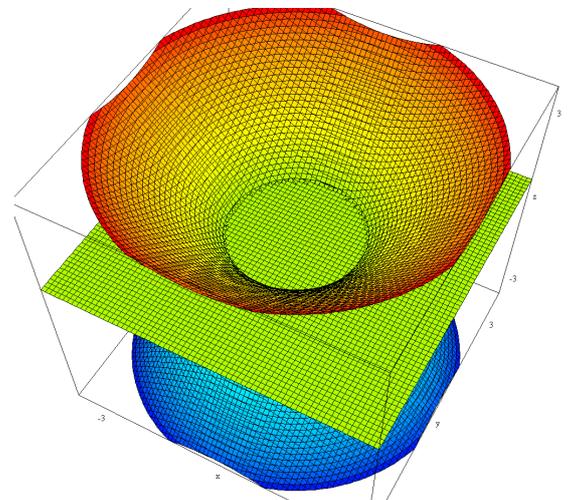
or $(4k - 1)^2 = (-4k + 1)^2$ donc $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Tout point M de (D) appartient à (S)

3. Un plan P parallèle au plan (xOy) a pour équation $z = k$
Soit M un point du plan $z = k$, M a pour coordonnées $(x; y; k)$, si $M \in (S)$ alors $x^2 + y^2 = 1 + k^2$ donc l'intersection de la surface avec un plan parallèle au plan (xOy) est un cercle de ce plan de centre $\Omega(0; 0; k)$ de rayon $\sqrt{1 + k^2}$

4. a. Si $z = 68$ alors $x^2 + y^2 = 69$ donc (C) est le cercle du plan d'équation $z = 68$, de centre le point $\Omega(0; 0; 68)$ de rayon $\sqrt{69}$

4. b. Soit $d = \text{PGCD}(a; b)$ et $m = \text{PPCM}(a; b)$
 $dm = ab$ donc $ab = 440d$
 $d = \text{PGCD}(a; b)$ donc il existe deux entiers naturels x et y premiers entre eux tels que $a = dx$ et $b = dy$

en remplaçant dans $a < b$ alors $x < y$ ($d > 0$)
en remplaçant dans $a^2 + b^2 = 4625$ alors $d^2(x^2 + y^2) = 4625$
 $4625 = 5^3 \times 37$ donc d^2 divise $5^3 \times 37$ donc soit $d = 1$ soit $d = 5$



Si $d = 1$, on cherche a et b premiers entre eux tels que $ab = 440$ et $a^2 + b^2 = 4\,625$

soit à résoudre le système :
$$\begin{cases} a^2 b^2 = 440^2 \\ a^2 + b^2 = 4\,625 \end{cases}$$

a^2 et b^2 sont solutions de $X^2 - 4\,625 X + 440^2 = 0$

Soit $X_1 = \frac{4625 + \sqrt{824\,649}}{2}$ ou $X_2 = \frac{4625 - \sqrt{824\,649}}{2}$

Ces nombres n'étant pas entiers, il n'existe pas d'entiers naturels a et b tels que
$$\begin{cases} a^2 b^2 = 440^2 \\ a^2 + b^2 = 4\,625 \end{cases}$$

Si $d = 5$, $ab = 440 d$ donc $d^2 xy = 440 d$ avec $d = 5$ donc $xy = 88$

on cherche a et b premiers entre eux tels que

$$xy = 88 \text{ et } x^2 + y^2 = 185$$

soit à résoudre le système :
$$\begin{cases} x^2 y^2 = 88^2 \\ x^2 + y^2 = 185 \end{cases}$$

x^2 et y^2 sont solutions de $X^2 - 185 X + 88^2 = 0$

Soit $X_1 = 64$ ou $X_2 = 81$

donc x et y sont des entiers naturels tels que $x < y$ donc $x = 8$ et $y = 9$

$a = 5x$ et $b = 5y$ donc $a = 40$ et $b = 45$

Il existe un seul point M de (C) de coordonnées (a, b) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et $\text{ppcm}(a; b) = 440$