Pour tout entier naturel n, on définit deux entiers a et b en posant a = 4 n + 1 et b = 5 n + 3 :
On s'intéresse aux valeurs du PGCD de a et de b en fonction de n.
On s'intéresse aux valeurs du PGCD de a et de b en fonction de n.

**1. Conjectures :**

a. En utilisant un tableur, émettre une conjecture sur les valeurs possibles de pgcd(a ; b).

b. En observant les résultats obtenus sur le tableur, comment pensez-vous pouvoir caractériser les valeurs de n telles que pgcd(a ; b) = 7 ?

**2. Démonstrations :**

a. Démontrer la conjecture faite en 1.a)

b. En raisonnant par disjonction des cas, déterminer les valeurs de n telles que pgcd(a ; b) = 7.

## CORRECTION

1. Conjectures :

*a*. D'après les premiers résultats du tableur, pgcd(*a* ; *b*) est égal à 1 ou 7

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a = 4n + 1$ | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 | 41 | 45 | 49 | 53 | 57 | 61 | 65 | 69 | 73 | 77 | 81 | 85 | 89 | 93 | 97 |
| $b = 5n + 3$ | 3 | 8 | 13 | 18 | 23 | 28 | 33 | 38 | 43 | 48 | 53 | 58 | 63 | 68 | 73 | 78 | 83 | 88 | 93 | 98 | 103 | 108 | 113 | 118 | 123 |
| PGCD($a$ ; $b$) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

*b*. En observant les résultats obtenus sur le tableur, pgcd($a$ ; $b$) = 7 pour $n = 7k + 5$ ($k \in \mathbb{N}$)

2. *a*. $-5a + 4b = -5(4n + 1) + 4(5n + 3) = -20n - 5 + 20n + 12 = 7$ donc pgcd($a$ ; $b$) divise 7 donc est égal à 1 ou 7.

*b*. Si pgcd($a$ ; $b$) = 7 il existe deux entiers $x$ et $y$ premiers entre eux tels que $a = 7x$ et $b = 7y$
donc $-5 \times 7x + 4 \times 7y = 7$ soit $-5x + 4y = 1$
Une solution particulière de cette équation est $x = -1$ et $y = -1$
$\begin{cases} -5x + 4y = 1 \\ -5 \times (-1) + 4 \times (-1) = 1 \end{cases}$ donc par différence membre à membre $-5(x + 1) + 4(y + 1) = 0$
soit $5(x + 1) = 4(y + 1)$ ; 4 et 5 étant premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $y + 1$ donc il existe un entier relatif $k$ tel que $y + 1 = 5k$ ;
en remplaçant dans $5(x + 1) = 4(y + 1)$ alors $x + 1 = 4k$ donc $x = 4k - 1$ et $y = 5k - 1$
Vérification : $-5x + 4y = -5(4k - 1) + 4(5k - 1) = 1$ donc les solutions de $-5x + 4y = 1$ sont les couples $(4k - 1 ; 5k - 1)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

alors $a = 7(4k - 1)$ et $b = 7(5k - 1)$ ; $a$ est un entier naturel donc $k \geq 1$
$a = 4n + 1 = 7 \times (4k - 1)$ donc $4n + 1 = 28k - 7$ donc $4n = 28k - 8$ soit $n = 7k - 2$ ou encore $n = 7K + 5$ (avec $K = k - 1$)
$b = 7(5k - 1) = 5n + 3$ donc $35k - 7 = 5n + 3$ soit $5n = 35k - 10$ donc $n = 7k - 2$ ou encore $n = 7K + 5$ (avec $K = k - 1$)
pgcd($a$ ; $b$) = 7 pour $n = 7K + 5$ ($K \in \mathbb{N}$)

Si $n \neq 7K + 5$ ($K \in \mathbb{N}$) alors pgcd($a$ ; $b$) = 1.