**Amérique du sud novembre 2012**

**Exercice 1 6 points**
**Partie A**
**1. Restitution organisée de connaissances**

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On suppose connus les résultats suivants :

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée.
- $e^0 = 1$.
- Pour tout réel $x$, on a $e^x > x$.
- Soit deux fonctions $v$ et $w$ définies sur l'intervalle [ A ; + ∞ [, où A est un réel positif.

Si pour tout $x$ de [ A ; + ∞ [ : $v(x) \leq w(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} w(x) = +\infty$.

***a.*** Soit φ la fonction définie sur [ 0 ; + ∞ [ par $\varphi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout $x$ de [ 0 ; + ∞ [, $\varphi(x) \geq 1$.

***b.*** En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

**2.** Soit $f$ la fonction définie sur [ 0 ; + ∞ [ par $f(x) = \frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{2}x}$.

***a.*** Etudier la limite de la fonction $f$ en + ∞.
***b.*** Etudier les variations de la fonction $f$, puis dresser son tableau de variations sur [ 0 ; + ∞ [.

**Partie B**
On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1mg de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. On appelle $g(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant $t$ exprimé en heures ($t \geq 0$).

On constate expérimentalement que la fonction $g$ est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + \frac{1}{2} y = 0$.

*a.* Déterminer le réel a pour que la fonction $u$ définie par l'équation $u(t) = a\, t\, e^{-\frac{1}{2}t}$ soit solution de l'équation (E).
*b.* Montrer qu'une fonction $v$ est solution de l'équation (E) si et seulement si, la fonction $h = v - u$ est solution de l'équation (E').
*c.* Résoudre l'équation (E').
*d.* En déduire les solutions de l'équation (E).
**3.** On donne l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Entrée | Affecter la valeur 3 à la variable $n$ |
| Traitement | Tant que $f(n) > 0{,}1$ |
| | Incrémenter la variable $n$ de 1 |
| | Fin Tant que |
| Sortie | Afficher la valeur de $n$ |

où $f$ est la fonction étudiée dans la partie A.
***a.*** A l'aide de la question 2. *a.* de la partie A, expliquer pourquoi il est certain que cet algorithme donne une valeur en sortie.
***b.*** Quelle est la valeur $n_0$ de la variable $n$ obtenue à la sortie de l'algorithme ?

**Exercice 2  5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = i,\ z_B = 2\,i \text{ et } z_C = 1$$

On considère la transformation *f* qui à tout point M du plan d'affixe *z*, distinct de A, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{2\,i\,z}{z - i}$

On fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

**1.** Déterminer l'ensemble des points M d'affixe *z* tels que $z = z'$ (ensemble des points invariants par la transformation *f* ).

**2.** Déterminer, sous forme algébrique, les affixes des points B' et C', images respectives des points B et C par *f* .

**3.** ***a.*** Montrer que, pour tout point M distinct de A, l'affixe *z*' de M' vérifie l'égalité : $z' - 2\,i = \dfrac{-2}{z - i}$.

***b.*** En déduire que si le point M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1, alors son image M' appartient à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

***c.*** Exprimer une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'})$ en fonction d'une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$.

On considère le point D d'affixe $z_D = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\,i$. Vérifier que D appartient au cercle Γ.

Construire, à la règle et au compas, le point D et son image D ' par *f* .

**4.** On note G l'isobarycentre des points O, B et C.

***a.*** Déterminer l'affixe du point G.

***b.*** On admet que l'image G ' du point G a pour affixe $z_{G'} = -3 - i$.

Le point G' est-il l'isobarycentre des points O, B ' et C ' ?

**Exercice 2     5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan orienté, on considère un rectangle direct ABCD tel que AB = $L$ et AD = 1 ( $L$ > 1).

Sur les segments [AB] et [CD], on place respectivement les points F et E tels que AFED soit un carré.

On suppose qu'il existe une similitude directe $f$ de rapport $k$ telle que :

$$f\,(\mathrm{A}) = \mathrm{B},\ f\,(\mathrm{B}) = \mathrm{C},\ f\,(\mathrm{C}) = \mathrm{E}.$$

**Partie A**

1. En utilisant des rapports de longueurs, montrer que $L = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude $f$.

On appelle $\Omega$ le centre de la similitude $f$.

b. Déterminer l'image par la composée $f \circ f$ des points $\Omega$, A et B.

c. Quelle est la nature de la transformation $f \circ f$ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

d. En déduire que $\Omega$ est le point d'intersection des droites (AC) et (BE).

3. a. Déterminer l'image de la droite (CD) par la similitude $f$.

b. En déduire une construction du point E′, image du point E par la similitude $f$.

**Partie B**

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AF}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$.

On appelle $z$ l'affixe du point M, et $z'$ l'affixe du point M′, image du point M par $f$.

1. Montrer que $z' = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\,\mathrm{i}\,z + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

2. Déterminer l'image du point D par $f$.

**Exercice 3     4 points**

A cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraine à faire des services.

Pour tout entier naturel non nul, on note $R_n$ l'événement « le joueur réussit son $n^{\text{-ième}}$ service » et $\overline{R_n}$ l'événement contraire.

Soit $x_n$ la probabilité $R_n$ est $y_n$ celle de $\overline{R_n}$ .

La probabilité qu'il réussisse son premier service est égale à 0,7.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le joueur réussit le *n*-ième service, la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,8 ;
- si le joueur ne réussit pas le *n*-ième service, la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,7.

**1.** On s'intéresse aux deux premiers services de l'entrainement.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre services réussis sur ces deux premiers services.

***a.*** Déterminer la loi de probabilité de X. (On pourra utiliser un arbre de probabilité).

***b.*** Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

**2.** On s'intéresse maintenant au cas général.

***a.*** Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$ .

***b.*** Montrer que pour tout entier naturel non nul *n*, on a :

$$x_{n+1} = 0,1\,x_n + 0,7.$$

**3.** Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel *n* non nul par ;

$$u_n = 9\,x_n - 7$$

Dans ces deux questions, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

***a.*** Déterminer la nature de la suite $(u_n)$.

***b.*** En déduire la limite de la suite $(x_n)$.

**Exercice 4     5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\,\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$ .

Soit **P** le plan d'équation cartésienne $2\,x - y + 3\,z - 1 = 0$ et soit S le point de coordonnées (1 ; 3 ; 5).

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et proposer une démonstration de la réponse indiquée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

**1.** Les points d'intersection du plan **P** avec les trois axes du repère sont les sommets d'un triangle isocèle.

**2.** La droite $\delta_1$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 4\,t\ , t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 - 2\,t \end{cases}$$

est incluse dans le plan **P** .

**3.** La droite $\delta_2$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -\,t \\ y = 7 + 4\,t\,, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 7 + 2\,t \end{cases}$$

est la droite parallèle à la droite $\delta_1$ passant par le point S.

**4.** Le projeté orthogonal du point S sur le plan **P** a pour coordonnées :

$$\left(-\frac{6}{7};\frac{55}{14};\frac{31}{14}\right).$$

**5.** Le plan **P** coupe la sphère de centre S et de rayon 3.

## CORRECTION

**Exercice 1 6 points**

**Partie A**

**1. Restitution organisée de connaissances**

***a.*** $\varphi$ est une fonction dérivable sur [ 0 ; + ∞ [ et $\varphi'(x) = e^{x} - x$

Pour tout réel $x$, on a $e^{x} > x$ donc $\varphi'(x) > 0$

donc $\varphi$ est strictement croissante sur [ 0 ; + ∞ [, donc pour tout $x$ de [ 0 ; + ∞ [, $\varphi(x) \geq \varphi(0)$ soit $\varphi(x) \geq 1$.

***b.*** Pour tout $x$ de [ 0 ; + ∞ [, $\varphi(x) \geq 1$ donc $e^{x} \geq \dfrac{x^2}{2}$ donc comme $x \geq 0$, $\dfrac{e^{x}}{x} \geq x$ , or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ .

**2.** Soit $f$ la fonction définie sur [ 0 ; + ∞ [ par $f(x) = \dfrac{1}{2} x\, e^{-\frac{1}{2}x}$ .

***a.*** Soit $X = \dfrac{1}{2} x$ , et $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ donc $\dfrac{1}{2} x\, e^{-\frac{1}{2}x} = X\, e^{-X}$,

or $\lim\limits_{X \to +\infty} X\, e^{-X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2} x\, e^{-\frac{1}{2}x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

***b.*** Soit $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{2} x & u'(x) = \dfrac{1}{2} \\ v(x) = e^{-\frac{1}{2}x} & v'(x) = -\dfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$

donc $f'(x) = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} - \dfrac{1}{4} x\, e^{-\frac{1}{2}x} = \dfrac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}x} ( 2 - x )$

La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc $f'(x)$ a le même signe que $2 - x$

| $x$ | 0 | | 2 | | + ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | – | |
| $f$ | 0 | ↗ | $e^{-1}$ | ↘ | 0 |

**Partie B**

**1. *a.*** Soit $\begin{cases} u(t) = a\,t & u'(x) = a \\ v(t) = e^{-\frac{1}{2}t} & v'(x) = -\dfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \end{cases}$ donc $u'(t) = a \dfrac{1}{2} ( 2 - t )\, e^{-\frac{1}{2}t}$

$u$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $u' + \dfrac{1}{2} u = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}$ soit pour tout $t$ de [ 0 ; + ∞ [ :

$a \dfrac{1}{2} ( 2 - t )\, e^{-\frac{1}{2}t} + \dfrac{1}{2} a\, t\, e^{-\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}$ soit $a\, e^{-\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}$ donc $a = \dfrac{1}{2}$.

pour tout $t$ de [ 0 ; + ∞ [ : $u(t) = \dfrac{1}{2} t\, e^{-\frac{1}{2}t}$.

***b.*** $h = v - u$ est solution de l'équation (E') $\Leftrightarrow h' + \dfrac{1}{2} h = 0$

$\Leftrightarrow ( v - u )' + \dfrac{1}{2} ( v - u ) = 0 \Leftrightarrow v' + \dfrac{1}{2} v = u' + \dfrac{1}{2} u$ or $u' + \dfrac{1}{2} u = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}$

$\Leftrightarrow v' + \dfrac{1}{2} v = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \Leftrightarrow v$ solution de (E).

***c.*** L'équation (E') est équivalente à $y' = -\dfrac{1}{2} y$ donc les solutions de (E') sont les fonctions de la forme $y(t) = C\, e^{-\frac{1}{2}t}$

***d.*** $v$ est solution de (E) $\Leftrightarrow v - u$ solution de (E') $\Leftrightarrow v - u = C\, e^{-\frac{1}{2}t}$

$\Leftrightarrow$ pour tout $t$ de [ 0 ; + ∞ [ : $v(t) = C\, e^{-\frac{1}{2}t} + u(t)$

$\Leftrightarrow$ pour tout $t$ de [ 0 ; + ∞ [ : $v(t) = \left( C + \dfrac{1}{2} t \right) e^{-\frac{1}{2}t}$

**3. *a.*** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $f(x)$ est aussi petite que voulue (ici 0,1) à condition de prendre $n$ assez grand donc il est certain que cet algorithme donne une valeur en sortie.

***b.***

| $n$ | $f(n)$ | Test | Algorithme |
|---|---|---|---|
| 3 | 0,3347 | $f(n) > 0,1$ | continue |
| 4 | 0,2707 | $f(n) > 0,1$ | continue |
| 5 | 0,2052 | $f(n) > 0,1$ | continue |
| 6 | 0,1494 | $f(n) > 0,1$ | continue |
| 7 | 0,1057 | $f(n) > 0,1$ | continue |
| 8 | 0,0733 | $f(n) > 0,1$ | continue |
| 9 | 0,0500 | $f(n) > 0,1$ | continue |
| 10 | 0,0337 | $f(n) > 0,1$ | continue |
| 11 | 0,0225 | $f(n) > 0,1$ | continue |
| 12 | 0,0149 | $f(n) > 0,1$ | continue |
| 13 | 0,0098 | $f(n) \leq 0,1$ | s'arrête |

La fonction $f$ est décroissante sur $[\ 2\ ;\ +\infty\ [$ donc si $n \geq 8$, $f(n) \leq 0,01$ donc $n_0 = 13$

**Exercice 2 4 points**

**1.** $z = z' \Leftrightarrow z \neq \mathrm{i}$ et $z = \dfrac{2\,\mathrm{i}\,z}{z-\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow z \neq \mathrm{i}$ et $z\,(z-\mathrm{i}) = 2\,\mathrm{i}\,z \Leftrightarrow z \neq \mathrm{i}$ et $z^2 - \mathrm{i}\,z - 2\,\mathrm{i}\,z = 0$
$\Leftrightarrow z \neq \mathrm{i}$ et $z^2 - 3\,\mathrm{i}\,z = 0 \Leftrightarrow z \neq \mathrm{i}$ et $z\,(z - 3\,\mathrm{i}) = 0$
$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 3\,\mathrm{i}$
Il existe deux points invariants par $f$ : O et E d'affixe 3 i.

**2.** B' a pour affixe $b' = \dfrac{2\,\mathrm{i}\times 2\,\mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}-\mathrm{i}} = \dfrac{2\,\mathrm{i}\times 2\,\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = 4\,\mathrm{i}$

C' a pour affixe $c' = \dfrac{2\,\mathrm{i}\times 1}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{2\,\mathrm{i}\times(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})\times(1+\mathrm{i})} = \dfrac{2\,(\mathrm{i}-1)}{2} = -1+\mathrm{i}$

**3. *a.*** $z' - 2\,\mathrm{i} = \dfrac{2\,\mathrm{i}\,z}{z-\mathrm{i}} - 2\,\mathrm{i} \Leftrightarrow z' - 2\,\mathrm{i} = \dfrac{2\,\mathrm{i}\,z - 2\,\mathrm{i}\,(z-\mathrm{i})}{z-\mathrm{i}} \Leftrightarrow$

$z' - 2\,\mathrm{i} = \dfrac{2\,\mathrm{i}\,z - 2\,\mathrm{i}\,z + 2\,\mathrm{i}^2}{z-\mathrm{i}} \Leftrightarrow z' - 2\,\mathrm{i} = \dfrac{-2}{z-\mathrm{i}}$

***b.*** $|\,z' - 2\,\mathrm{i}\,| = \dfrac{2}{|\,z-\mathrm{i}\,|}$, si le point M appartient au cercle $\Gamma$ de centre A et de rayon 1, alors $|\,z - \mathrm{i}\,| = 1$ donc $|\,z' - 2\,\mathrm{i}\,| = 2$ soit $|\,z' - z_B\,| = 2$ donc BM' = 2
Le point M' appartient au cercle de centre B et de rayon 2.

***c.*** $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{BM'}}) = \arg\,(z' - 2\,\mathrm{i})$ or $z' - 2\,\mathrm{i} = \dfrac{-2}{z-\mathrm{i}}$

donc $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{BM'}}) = \arg\left(\dfrac{-2}{z-\mathrm{i}}\right) \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{BM'}}) = \arg\,(-2) - \arg\,(z-\mathrm{i})$

$\Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{BM'}}) = \pi - \arg\,(z - z_A) \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{BM'}}) = \pi - (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AM}})$.

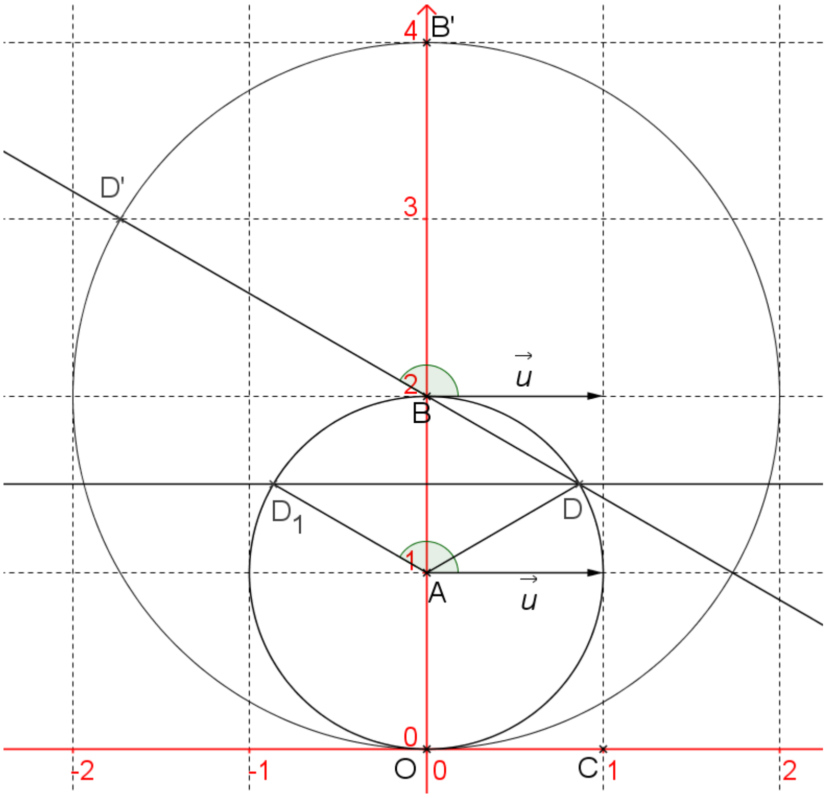
Pour vérifier que D appartient au cercle $\Gamma$, il suffit de vérifier que AD = 1,

$\mathrm{AD} = |\,z_D - \mathrm{i}\,| \Leftrightarrow \mathrm{AD} = \left|\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i} - \mathrm{i}\right| \Leftrightarrow \mathrm{AD} = \left|\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right|$

$\Leftrightarrow \mathrm{AD} = \sqrt{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}} \Leftrightarrow \mathrm{AD} = 1$

D appartient au cercle de centre A de rayon 1 donc D' appartient au cercle de centre B et de rayon 2 et $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{BD'}}) = \pi - (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$
or $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}) = \arg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ donc $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}) = \dfrac{\pi}{6}$

D est le point d'abscisse positive, intersection du cercle de centre A de rayon 1 et de la droite d'équation $y = 3$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}) = \dfrac{\pi}{6}$,
Soit $D_1$ le symétrique de D par rapport à l'axe des imaginaires, la figure (cercle et droite) étant symétrique par rapport à l'axe des imaginaires, $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AD_1}}) = \pi - \dfrac{\pi}{6}$
La parallèle en B à la droite ($\mathrm{AD}_1$) coupe le cercle de centre B de rayon 2 en deux points, un seul D' est tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{BD'}}) = \pi - \dfrac{\pi}{6}$ soit $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{BD'}}) = \dfrac{5\pi}{6}$.




**4.** ***a.*** G a pour affixe $z_G = \frac{1}{3}(z_O + z_B + z_C)$ soit $\frac{1}{3}(1 + 2\text{ i})$

***b.*** L'isobarycentre des points O, B ' et C ' a pour affixe $\frac{1}{3}\left(z_O + z_{B'} + z_{C'}\right)$ soit $\frac{1}{3}(-1 + \text{i} + 4\text{ i})$ donc $\frac{-1}{3} + \frac{5}{3}\text{i}$ donc G' n'est pas l'isobarycentre des points O, B ' et C '.

**Exercice 2     5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**
**Partie A**
**1.**  $f$ (A) = B et $f$ (B) = C, donc BC = $k$ AB donc 1 = $k$ $L$
$f$ (B) = C et $f$ (C) = E donc CE = $k$ BC

$L > 1$ et AFED est un carré donc CE = CD –DE = $L - 1$ donc $L - 1 = k$ donc $L$ est vérifie $1 = L\,(L - 1)$ soit $L^2 - L - 1 = 0$
Résolvons $x^2 - x - 1 = 0$,   $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) = 5$
donc les solutions de $x^2 - x - 1 = 0$, sont $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
$L > 0$ donc $L = x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

***2. a.***  $f$ (A) = B et $f$ (B) = C donc l'angle de $f$ est $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BC})$ soit $\pi + (\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC})$ donc l'angle de $f$ est $\pi - \dfrac{\pi}{2}$ soit $\dfrac{\pi}{2}$.

Le rapport de f est $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{L} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$ soit $\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{4}$ donc $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

***b.***  $\Omega$ est le centre de la similitude $f$ donc est invariant par $f$ donc $f \circ f(\Omega) = f(\Omega) = \Omega$
$f$ (A) = B et $f$ (B) = C donc $f \circ f$ (A) = $f$ (B) = C
$f$ (B) = C et $f$ (C) = E donc $f \circ f$ (B) = $f$ (C) = E

***c.***  $f$ est une similitude directe de centre $\Omega$, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ de rapport $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ donc $f \circ f$ est une similitude directe de centre $\Omega$, d'angle $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ de rapport $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \times \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

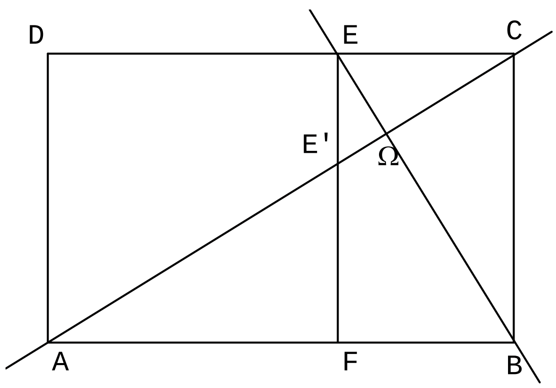
$f \circ f$ est une similitude directe de centre $\Omega$, d'angle $\pi$ de rapport $\dfrac{5+1-2\sqrt{5}}{4}$ soit $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ donc $f \circ f$ est une homothétie de centre $\Omega$, de rapport $-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

***d.***  Par une homothétie, le centre de l'homothétie, un point différent du centre et son image sont alignés
$f \circ f$ est une homothétie et $f$ (A) = C donc $\Omega$ appartient à la droite (AC)
$f \circ f$ est une homothétie et $f$ (B) = E donc $\Omega$ appartient à la droite (BE)

$\Omega$ est le point d'intersection des droites (AC) et (BE).

**3.** ***a.***  Par la similitude $f$ d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$, une droite est transformée en une droite perpendiculaire, or $f$ (C) = E donc l'image de la droite (CD) par la similitude $f$ est la droite passant par E perpendiculaire à la droite (CD) donc est la droite (EF).

***b.***  $f \circ f$ est une homothétie et $f$ (C) = E donc $f \circ f$ (C) = E' donc les points $\Omega$, C et E' sont alignés.
Le point E appartient à la droite (CD), par la similitude $f$ d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$, une droite est transformée en une droite perpendiculaire, or $f$ (C) = E donc l'image de la droite (CD) par la similitude $f$ est la droite passant par E perpendiculaire à la droite (CD) donc est la droite (EF).
E' est donc le point d'intersection des droites ($\Omega$C) et (EF).



**Partie B**

1. $f$ est une similitude directe de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{2}$ de rapport $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

donc f a une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + b$ avec $|\,a\,| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et arg $a = \frac{\pi}{2}$ donc $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ soit $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\mathrm{i}$

donc $z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\mathrm{i}\,z + b$ , $f$ (A) = B or A a pour affixe 0 et B a pour affixe $L$ soit $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, donc $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\mathrm{i}\times 0 + b$

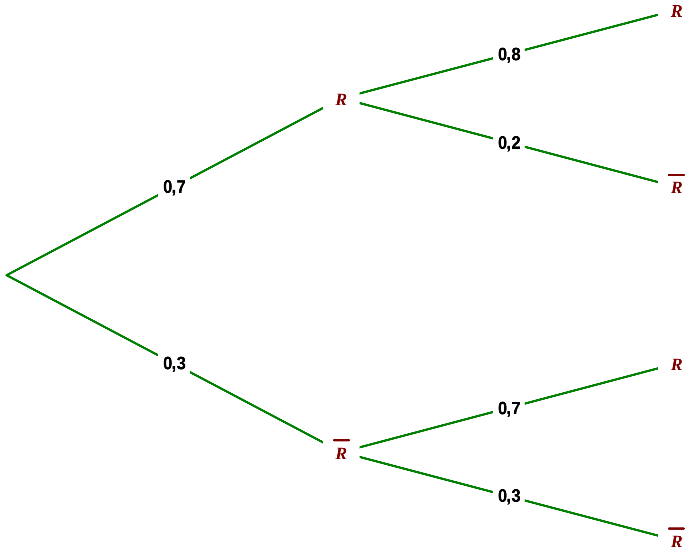
donc $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc $z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\mathrm{i}\,z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. D a pour affixe i donc l'image du point D par $f$ a pour affixe $z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\mathrm{i}\times\mathrm{i} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ soit $z' = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc $z' = 1$

$f$ (D) = F

**Exercice 3 4 points**

**1. *a.***




La probabilité que le joueur réussisse 2 services est $p(R_1 \cap R_2) = 0{,}7 \times 0{,}8$

La probabilité que le joueur réussisse 0 service est $p(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = 0{,}3 \times 0{,}3$

donc $p(X = 2) = 0{,}56$ et $p(X = 0) = 0{,}09$

La probabilité que le joueur réussisse un seul service est égale à

$p(R_1 \cap \overline{R_2}\,_2) + p(\overline{R_1} \cap R_2) = 0{,}7 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}14 + 0{,}21 = 0{,}35$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | Total |
|---|---|---|---|---|
| $p(X = x)$ | 0,09 | 0,35 | 0,56 | 1 |
| $x\, p(X = x)$ | 0 | 0,35 | 1,12 | 1,47 |

***b.*** $E(X) = 0 \times p(X = 0) + 1 \times p(X = 1) + 2 \times p(X = 2) = ,147$

**2. *a.*** Si le joueur réussit le $n$-ième service, la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,8 ; donc $P_{R_n}(R_{n+1}) = 0{,}8$

Si le joueur ne réussit pas le $n$-ième service, la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,7 ; donc $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = 0{,}7$

***b.*** $x_{n+1} = P_{R_n}(R_{n+1}) \times P(R_n) + P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \times P(\overline{R_n})$

$x_{n+1} = 0{,}8\, x_n + 0{,}7 \times (1 - x_n)$

$x_{n+1} = 0{,}8\, x_n + 0{,}7 - 0{,}7\, x_n$ donc $x_{n+1} = 0{,}1\, x_n + 0{,}7$.

**3.** Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ non nul par ;

$$u_n = 9\, x_n - 7$$

***a.*** Déterminer la nature de la suite $(u_n)$.

$u_{n+1} = 9\, x_{n+1} - 7 = 9\,(0{,}1\, x_n + 0{,}7) - 7$

$u_{n+1} = 0{,}9\, x_n + 6{,}3 - 7$

$u_{n+1} = 0{,}1\,(9\, x_n - 7)$

$u_{n+1} = 0{,}9\, u_n$ donc la suite $(u_n)$ est géométrique de raison 0,1.

***b.*** $u_1 = 9\, x_1 - 7 = 9 \times 0{,}7 - 7 = -0{,}7$

$u_n = 0{,}1^{n-1}\, u_1$ donc $u_n = -0{,}1^{n-1} \times 0{,}7$

$-1 < 0{,}1 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}1^{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

$x_n = \dfrac{u_n + 7}{9}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{7}{9}$

**Exercice 4 5 points**

**1.** Soit A le point d'intersection du plan et de l'axe $(O ; \vec{i})$, A a pour coordonnées ( $x$ ; 0 ; 0), A $\in$ **P** donc $2x - 1 = 0$ donc $x = 0,5$

A (0,5 ; 0 ; 0 )

Soit B le point d'intersection du plan et de l'axe $(O ; \vec{j})$, B a pour coordonnées ( 0 ; $y$ ; 0 ), B $\in$ **P** donc $-y - 1 = 0$ donc $y = -1$

B (0 ; – 1 ; 0 )

Soit C le point d'intersection du plan et de l'axe $(O ; \vec{k})$, C a pour coordonnées ( 0 ; 0 ; $z$ ), C $\in$ **P** donc $3z - 1 = 0$ donc $z = \dfrac{1}{3}$.

C$\left(0 ; 0 ; \dfrac{1}{3}\right)$.

$AB^2 = 0,5^2 + 1 = 1,25$

$AC^2 = 0,5^2 + \dfrac{1}{9} = \dfrac{13}{36}$

$BC^2 = 1 + \dfrac{1}{9} = \dfrac{10}{9}$ donc les points d'intersection du plan **P** avec les trois axes du repère ne sont pas les sommets d'un triangle isocèle.

**2.** Tout point M de $\delta_1$ a des coordonnées de la forme

$$(1 + t ; 5 - 4t ; 2 - 2t) \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$2x - y + 3z - 1 = 2(1 + t) - (5 - 4t) + 3(2 - 2t) - 1$

$2x - y + 3z - 1 = 2 + 2t - 5 + 4t + 6 - 6t - 1$

$2x - y + 3z - 1 = 2$ donc la droite $\delta_2$ n'est pas incluse dans le plan **P** .

**3.** Le point de $\delta_2$ de paramètre – 1 a pour coordonnées (1 ; 3 ; 5) donc le point S est le point de $\delta_2$ de paramètre $t = -1$

Un vecteur directeur de $\delta_1$ est le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de coordonnées ( 1 ; – 4 ; – 2 ).

Un vecteur directeur de $\delta_2$ est le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ de coordonnées ( 1 ; 4 ; 2 ).

$\overrightarrow{u_2} = -\overrightarrow{u_1}$ donc els deux droites sont parallèles, la droite $\delta_2$ est la droite parallèle à la droite $\delta_1$ passant par le point S.

**4.** $2x - y + 3z - 1 = 2 \times \left(-\dfrac{6}{7}\right) - \dfrac{55}{14} + 3 \times \dfrac{31}{14} - 1$,

$2x - y + 3z - 1 = \dfrac{-24 - 55 + 93 - 14}{14} = 0$ donc le point H de coordonnées $\left(-\dfrac{6}{7} ; \dfrac{55}{14} ; \dfrac{31}{14}\right)$, appartient au plan P.

$\overrightarrow{HS}$ a pour coordonnées $\left(1 + \dfrac{6}{7} ; 3 - \dfrac{55}{14} ; 5 - \dfrac{31}{14}\right)$, soit $\left(\dfrac{13}{7} ; -\dfrac{13}{14} ; \dfrac{39}{14}\right)$.

**P** est le plan d'équation cartésienne $2x - y + 3z - 1 = 0$ donc le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées ( 2 ; – 1 ; 3 ) est un vecteur normal au plan P.

$\overrightarrow{HS} = \dfrac{13}{14}\vec{n}$ donc la droite (HS) est la perpendiculaire en S à P donc H est le projeté orthogonal du point S sur le plan **P .**

**5.** La distance de S à P est égale à $\dfrac{|2 \times 1 - 3 - 3 \times 5 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \dfrac{17}{\sqrt{14}}$

$\dfrac{17}{\sqrt{14}} < 3$ donc le plan **P** coupe la sphère de centre S et de rayon 3.