CORRIGE

EXERCICE 1 :

1.Comme le coefficient de x^2 est positif dans l'expression de *f(x)*, les variations de celle-ci correspondent aux courbes 1 et 4. De plus son discriminant vaut $2^2-4\times 2\times(-4)=36>0$ donc sa courbe coupe l'axe *(Ox)* en deux points.

La courbe de la fonction *f* est dont la courbe 1.

. Comme le coefficient de x^2 est négatif dans l'expression de *g(x)*, les variations de celle-ci correspondent aux courbes 2, 3 et 5. De plus son discriminant vaut $(-2)^2-4\times(-1)\times(-3)=-8<0$ donc sa courbe ne coupe pas l'axe *(Ox)*.

La courbe de la fonction *g* est dont la courbe 3.

. Comme le coefficient de x^2 est négatif dans l'expression de *h(x)*, les variations de celle-ci correspondent aux courbes 2, 3 et 5. De plus son discriminant vaut $(-4)^2-4\times(-4)\times(-1)=0$ donc sa courbe coupe l'axe *(Ox)* en un unique point.

La courbe de la fonction *h* est dont la courbe 2.

2.a. La courbe 3 correspond à la fonction *g* qui admet un maximum en $x=\dfrac{-(-2)}{2\times(-1)}=-1$ qui est de ce fait l'abscisse du point A. Son ordonnée se calcule alors $g(-1)=-(-1)^2-2(-1)-3=-2$.

D'où $\boxed{A(-1;-2)}$.

b. Comme $B\in(Ox)$ son ordonnée vaut 0**.** La courbe 2 correspond à *h*, pour trouver l'abscisse de B on résout donc l'équation $h(x)=0$ or le discriminant étant nul, la solution est $x=\dfrac{-(-4)}{2\times(-4)}=-\dfrac{1}{2}$.

D'où $\boxed{B(-\frac{1}{2};0)}$.

c. Comme $C\in(Ox)$ et $D\in(Ox)$ leur ordonnée vaut 0**.** La courbe 1 correspond à *f*, pour trouver leurs abscisses, on résout donc l'équation $f(x)=0$ or le discriminant vaut 36 donc les solutions sont

$$x_1=\frac{-2-\sqrt{36}}{2\times 2}=-2 \text{ et } x_2=\frac{-2+\sqrt{36}}{2\times 2}=1.$$

D'où $\boxed{C(-2;0)}$ et $\boxed{D(1;0)}$.

EXERCICE 3 :

1.a. Pour tout $x \in [-5;5]$, on a : $f(x) = -2(x^2 - 2x - 3) = -2[x^2 - 2x + 1 - 4] = -2[(x-1)^2 - 4]$.

b. Les variations de $x \mapsto (x-1)^2 - 4$ sont les mêmes que celles de $x \mapsto (x-1)^2$ (ajout d'une constante) et celles de $f(x) = -2[(x-1)^2 - 4]$ sont opposées à celles de $x \mapsto (x-1)^2 - 4$ (multiplication par un nombre négatif).

D'où le tableau de variation de *f* :

x	**-5**		**1**		**5**
Variations de $f(x)$	-64	$\nearrow$	8	$\searrow$	-24

c. Le polynôme $-2x^2 + 4x + 6$ admet une racine évidente qui est (-1), on obtient alors sa deuxième racine qui vaut 3 en utilisant le produit des racines qui vaut $\frac{6}{-2} - 3$. Son tableau de signe est donc :

x	**-5**		**-1**		**3**		**5**
Signe de $f(x)$		**-**	**0**	**+**	**0**	**-**	

2.a. Pour tout $x \in D_g$ on a $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ donc *g* n'est pas définie si $f(x) = 0$ c'est à dire si $x = -1$ ou $x = 3$.

$\boxed{\text{D'où } D_g = [-5;-1[\cup]-1;3[\cup]3;5].}$

b. D'après son tableau de signe, $\boxed{f(x) < 0 \text{ sur } [-5;-1[\cup]3;5]}$

g est la composée de *f* et de la fonction inverse.

. Sur $[-5;-1[$ *f* est croissante, si $x \in [-5;-1[$ alors $f(x) \in]-\infty;0[$ et la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$ donc **leur composée *g* est décroissante sur** $[-5;-1[$**.**

. Sur $]3;5]$ *f* est décroissante, si $x \in]3;5]$ alors $f(x) \in]-\infty;0[$ et la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$ donc **leur composée *g* est croissante sur** $]3;5]$**.**

c. D'après son tableau de signe, $\boxed{f(x) > 0 \text{ sur }]-1;3[}$

. Sur $]-1;1]$ *f* est croissante, si $x \in]-1;1]$ alors $f(x) \in]0;+\infty[$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$ donc **leur composée *g* est décroissante sur** $]-1;1]$**.**

. Sur $[1;3[$ *f* est décroissante, si $x \in [1;3[$ alors $f(x) \in]0;+\infty[$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$ donc **leur composée *g* est croissante sur** $]3;5]$**.**

d. Le tableau de variation de *g* est donc :

x	-5		-1		1		3		5
Variations de $g(x)$	$-\frac{1}{64}$	$\searrow$	‖	$\searrow$	$\frac{1}{8}$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$	$-\frac{1}{24}$

3.a. Pour tout $x \in D_h$,on a $h(x) = 1 - \sqrt{f(x)}$ donc h est définie si $f(x) \geq 0$ c'est à dire sur $[-1;3]$.

On a donc : $\boxed{D_h = [-1;3]}$.

b. h a le même sens de variation que $x \mapsto -\sqrt{f(x)}$ (ajout de 1) qui a le sens de variation opposé de $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ (multiplication par –1). Etudions donc les variations de cette fonction qui est la composée de f avec la fonction racine carrée , or :

. Sur $[-1;1]$ f est croissante, si $x \in [-1;1]$ alors $f(x) \in]0;+\infty[$ et la fonction racine carrée est croissante sur $]0;+\infty[$ donc **leur composée est croissante sur $[-1;1]$.**

. Sur $[1;3]$ f est décroissante, si $x \in [1;3]$ alors $f(x) \in]0;+\infty[$ et la fonction racine carrée est croissante sur $]0;+\infty[$ donc **leur composée est décroissante sur $[1;3]$.**

. On en déduit que ***h* est décroissante sur $[-1;1]$ et croissant sur** $[1;3]$.

D'où son tableau de variation :

x	-1		1		3
Variations de $h(x)$	0	↘	$1-\sqrt{8}$	↗	0

BONUS :

1. 1 est racine évidente de $k(x)$ car $k(1) = 1 - 3 + 3 - 1 = 0$.

2. $k(x)$ se factorise donc d'après le théorème sous la forme $k(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.

En développant on trouve $k(x) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ et en identifiant à $k(x)$, on trouve :

a = 1 ; b – 1 = -3 d'où b = -2 , c – (-2) = -1 d'où c = -3. Donc $\boxed{k(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 3)}$.

3. Le polynôme du second degré $x^2 - 2x - 3$ admet –1 pour racine évidente.
On trouve que sa deuxième racine est 3 en utilisant le produit des racines qui vaut –3.
Par ailleurs il est du signe du coefficient du terme x^2 (positif) à l'extérieur de l'intervalle des racines.

D'où le tableau de signe de $k(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
Signe de (x – 1)		-	|	-	0	+	|	+	
Signe de $x^2 - 2x - 3$		+	0	-	|	-	0	+	
Signe de k(x)		-	0	+	0	-	0	+	