EXERCICE 1 (5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 - i$ et $c = 1 + i$.

1. *a*. Placer les points A, B et C sur une figure.

b. Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2. *a*. On appelle r la rotation de centre A telle que $r(B) = C$.
Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point $D = r(C)$.

b. Soit Γ le cercle de diamètre [BC].
Déterminer et construite l'image Γ ' du cercle Γ par la rotation r.

3. Soit M un point de Γ d'affixe z, distinct de C et M' d'affixe z' son image par r.

a. Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2} ; 2\pi\right[$ tel que $z = 1 + e^{i\theta}$.

b. Exprimer z' en fonction de θ .

c. Montrer que $\dfrac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

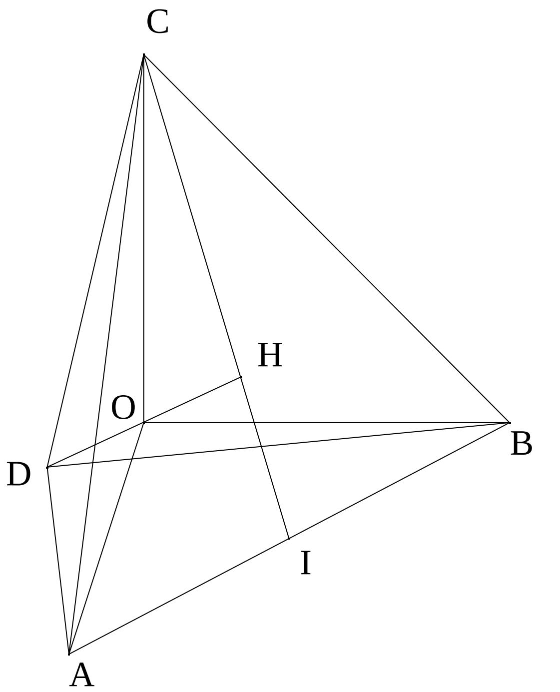
d. Placer sur la figure le point M d'affixe $1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M' par r.

EXERCICE 2 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soient a un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :

- OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O.
- OA = OB = OC = a.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. <u>Calcul de OH</u>.

a. Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC.

b. Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que OH = $a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

4. <u>Etude du tétraèdre ABCD</u>.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O ; \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OA}, \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OB}, \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)$.

a. Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}\right)$.

b. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).

c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.
Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.

EXERCICE 2 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2 ; seule l'équation de Γ donnée en 1. *c*. intervient à la question 4.

1. L'espace est rapporté an repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

a. Montrer que les plans P et Q d'équations respectives : $x + \sqrt{3}\,y - 2\,z = 0$ et : $2\,x - z = 0$ ne sont pas parallèles,

b. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans P et Q.

c. On considère le cône de révolution Γ d'axe (O*x*) contenant la droite Δ comme génératrice. Montrer que Γ, a pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7\,x^2$.

2. On a représenté sur les deux figures ci-dessous les intersections de Γ avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.
Déterminer dans chaque cas une équation des plans possibles, en justifiant avec soin votre réponse.

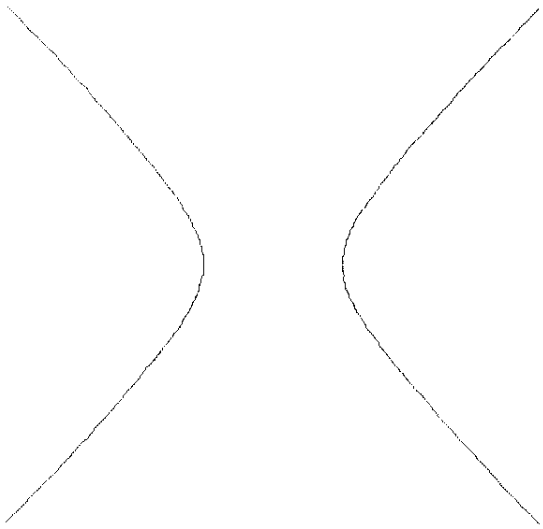


Figure 1

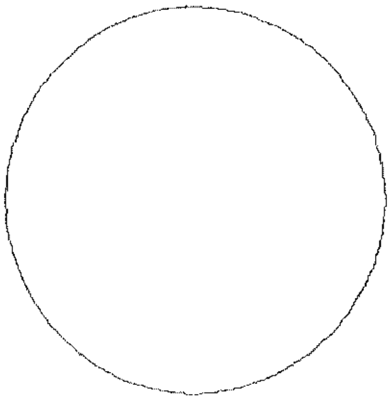


Figure 2

3. *a*. Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3$ [7], dont l'inconnue x est un entier relatif, n'a pas de solution.

b. Montrer la propriété suivante :
pour tous entiers relatifs a et b, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b.

4. *a*. Soient a , b et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante si le point A de coordonnées (a, b, c) est un point du cône Γ alors a et b et c sont divisibles par 7.

b. En déduire que le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

PROBLEME

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).

Ce problème a pour objet l'étude des deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (partie A)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (partie B).

<u>Partie A</u>

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.

Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = a\,y$.(où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.

Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0\ 2^{\frac{t}{T}}$.

<u>Partie B</u>

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante:

Soit $g(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$ la relation : (E) $g'(t) = a\ g(t)\left(1 - \frac{g(t)}{\mathrm{M}}\right)$, où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la partie A.

1. *a*. Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + a\,y = \frac{a}{\mathrm{M}}$.

b. Résoudre (E').

c. Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E'), alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t, $g(t) = \frac{\text{M}}{1+\text{C}\,e^{-at}}$, où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

a. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < \text{M}$.

b. Etudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).

Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \frac{\text{M}}{2}$.

c. Démontrer que $g'' = a\left(1-\frac{2g}{\text{M}}\right)$. Etudier le signe de g''. En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus.

Exprimer t_0 en fonction de a et C.

d. Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0, en fonction de M et C.

Partie C

1. Le tableau présenté en annexe I a permis d'établir que la courbe représentative de f passait par les points de coordonnées respectives (0 ; 1) et (0,5 ; 2). En déduire les valeurs de N_0, T et a.

2. Sachant que $g(0) = N_0$ et que $\text{M} = 100\,N_0$, démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'égalité suivante : $g(t) = \frac{100}{1+99\times 4^{-t}}$.

3. Tracer, sur la feuille donnée en Annexe II, la courbe Γ représentative de g, l'asymptote à Γ ainsi que le point de Γ d'abscisse t_0.

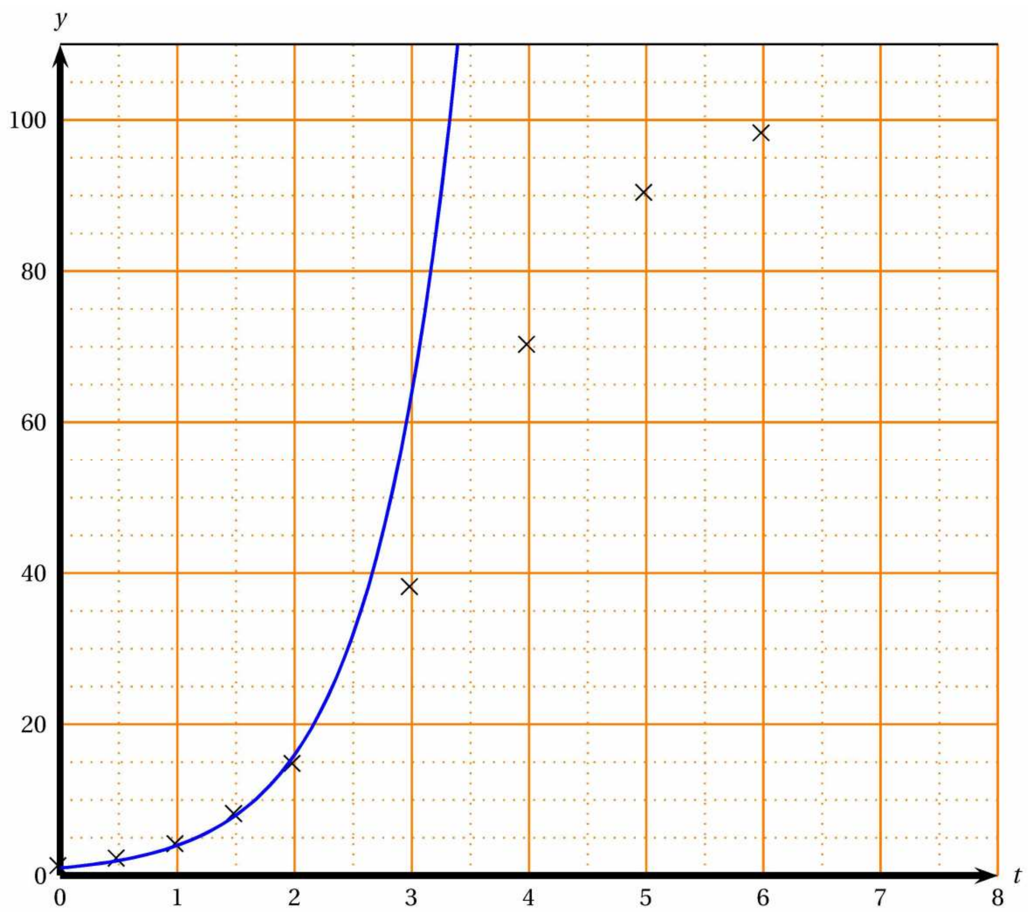
4. Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites ?

Annexe I

t (en h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
Nombre de bactéries (en millions)	1,0	2,0	3,9	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

Les points obtenus à partir de ce tableau, ainsi que la fonction f, sont représentés dans le repère ci-dessous.

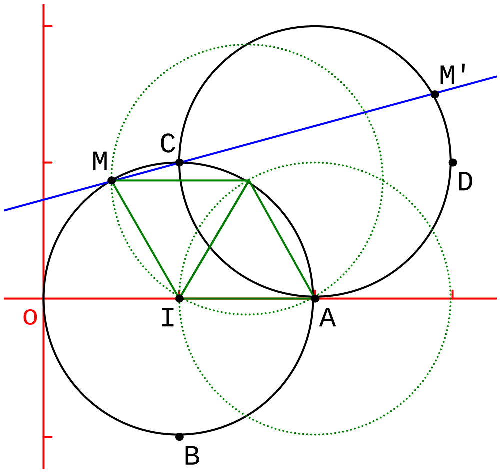
Annexe II



CORRECTION

EXERCICE 1 (5 points)

1. *a.*



b. $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{-1+\text{i}}{-1-\text{i}} = -\text{i}$ donc $|\,c-a\,| = |-\text{i}\,| \times |\,b-a\,|$ donc AC = AB, le triangle ABC est isocèle en A.

$\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in$ Z) donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

2. *a.* par la rotation r : $\begin{cases} A \to A \\ B \to C \end{cases}$ donc l'angle de r est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ donc $-\dfrac{\pi}{2}$

r a pour écriture complexe $z' - a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-a)$ donc $d - a = -\text{i}\,(c - a)$ donc $d = -\text{i}\,(-1+\text{i}) + 2 = 3 + \text{i}$.

b. La rotation r transforme le cercle de diamètre [BC] en le cercle de diamètre [r(B) r(C)] donc Γ' est le cercle de diamètre [CD].

3.*a.* Γ est le cercle de diamètre [BC] donc le cercle de centre I d'affixe 1 et de rayon 1 donc pour tout point de Γ, il existe un réel θ de $[0\,;2\pi[$ tel que $z = 1 + e^{i\theta}$,

M ≠ C donc $e^{i\theta} \neq \text{i}$ donc $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ donc il existe un réel θ appartenant à $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2};2\pi\right[$ tel que $z = 1 + e^{i\theta}$.

b. $z' - a = -\text{i}\,(z-a)$ donc $z' = -\text{i}\,(-1 + e^{i\theta}) + 2$ donc $z' = -\text{i}\,e^{i\theta} + 2 + \text{i}$

c. $z' - c = -\text{i}\,e^{i\theta} + 1$ et $z - c = e^{i\theta} - \text{i}$ donc $\dfrac{z'-c}{z-c} = \dfrac{1+\sin\theta - \text{i}\cos\theta}{\cos\theta + \text{i}\,(\sin\theta - 1)} = \dfrac{[1+\sin\theta - \text{i}\cos\theta\,][\cos\theta - \text{i}\,(\sin\theta-1)\,]}{\cos^2\theta + (\sin\theta-1)^2}$

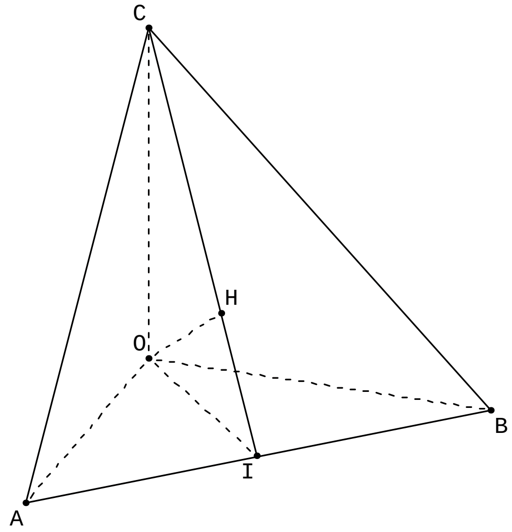
$$\frac{z'-c}{z-c} = \frac{\cos\theta\,[\,1+\sin\theta + (1-\sin\theta\,] + \text{i}\,[\cos^2\theta + (\sin\theta+1)(\sin\theta-1)\,]}{\cos^2\theta + (\sin\theta-1)^2} = \frac{2\cos\theta + \text{i}\,[\cos^2\theta + \sin^2\theta - 1\,]}{\cos^2\theta + (\sin\theta-1)^2} = \frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta + (\sin\theta-1)^2}$$

$\dfrac{z'-c}{z-c}$ est un réel donc les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CM'}$ sont colinéaires donc les points C, M et M' sont alignés.

d. Pour construire le point M, il suffit de tracer deux cercles de rayon 1, l'un de centre A, l'autre de centre le point N, on obtient ainsi deux triangles équilatéraux et donc le point M, le point M' est le point autre que C, intersection de la droite (CM) et du cercle Γ'.

EXERCICE 2 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O et OA = OB = OC = a donc d'après le théorème de Pythagore : $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 2a^2$ donc $AB = a\sqrt{2}$ de même $BC = CA = a\sqrt{2}$.
Le triangle ABC est équilatéral.



2. Dans le triangle équilatéral ABC, (IC) est la hauteur issue de C du triangle ABC donc I est le milieu de [AB]
Dans le triangle OAB rectangle isocèle en O, (OI) est la médiane et la hauteur issue de O donc (OI) est perpendiculaire à (AB)
(AB) est orthogonale à (OI) et (CI) deux droites sécantes du plan (ACI) donc est orthogonale à toute droite de ce plan en particulier à (OH).
Les droites (OH) et (AB) sont orthogonales.
De même les droites (OH) et (AC) sont orthogonales et les droites (OH) et (BC) sont orthogonales.
La droite (AO) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (OBC) : (OC) et (OB) donc au plan (OBC) donc est orthogonale à toute droite de ce plan en particulier à (BC)
Les droites (OH) et (BC) sont orthogonales donc la droite (BC) est orthogonale
à deux droites sécantes du plan (OAH) : (OA) et (OH) donc au plan (OAH) donc est orthogonale à toute droite de ce plan en particulier à (AH).
(CH) et (AH) sont des hauteurs du triangle (ABC) donc H est l'orthocentre du triangle ABC.

3. <u>Calcul de OH</u>.

a. $V = \frac{1}{3} \times$ Aire du triangle OBC $\times$ hauteur OA donc $V = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times a^2 \times a = \frac{1}{6}a^3$

$AB = a\sqrt{2}$ donc $CI = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{6}}{2} a$ donc l'aire S du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\times CI \times AB = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} a \times a\sqrt{2}$.

l'aire S du triangle ABC est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2} a^2$.

b. Le volume V du tétraèdre OABC = $\frac{1}{3} \times$ Aire du triangle ABC $\times$ hauteur OH = $\frac{1}{6}a^3$ donc $\frac{1}{3} \times S \times OH = V$

$OH = \frac{3\,V}{S}$ donc $OH = \dfrac{3\times\frac{1}{6}a^3}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}a = \frac{1}{\sqrt{3}}a$ donc $OH = a\,\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. <u>Etude du tétraèdre ABCD</u>.

a. A a pour coordonnées (a ; 0 ; 0), B a pour coordonnées (0 ; a ; 0), C a pour coordonnées (0 ; 0 ; a),
H est l'orthocentre du triangle équilatéral ABC donc est le centre de gravité du triangle ABC donc les coordonnées de H sont :
$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} ; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$ donc le point H a pour coordonnées : $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$.

b. $AB^2 = 2a^2$ et $AC^2 = 2a^2$; $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$ donc D a pour coordonnées $\left(-\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$ donc $BD^2 = CD^2 = AD^2 = = 2a^2$
donc le tétraèdre ABCD est régulier.

c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD alors ΩA = ΩB et ΩA = ΩC donc Ω appartient aux plans médiateurs de [AB] et de [AC], de même H est l'orthocentre du triangle équilatéral ABC donc H est le centre du cercle circonscrit à ce triangle donc HA = HB = HC donc H appartient aux plans médiateurs de [AB] et de [AC].
OA = OB = OC donc O appartient aux plans médiateurs de [AB] et de [AC] donc la droite (OH) appartient aux plans médiateurs de [AB] et de [AC] or ces deux plans sont distincts donc leur intersection est la droite (OH), donc Ω est un point de la droite (OH).

$\overrightarrow{O\Omega} = k\,\overrightarrow{OH}$ donc Ω a pour coordonnées $\left(k\frac{a}{3}, k\frac{a}{3}, k\frac{a}{3}\right)$.

$\Omega A = \Omega D$ donc $\left(k\frac{a}{3}+\frac{a}{3}\right)^2 + \left(k\frac{a}{3}+\frac{a}{3}\right)^2, + \left(k\frac{a}{3}+\frac{a}{3}\right)^2 = \left(k\frac{a}{3}-a\right)^2 + \left(k\frac{a}{3}\right)^2 + \left(k\frac{a}{3}\right)^2$

donc $3\left(k\frac{a}{3}+\frac{a}{3}\right)^2 = \left(k\frac{a}{3}-3\frac{a}{3}\right)^2 + 2\left(k\frac{a}{3}\right)^2$ soit $3\left(\frac{a}{3}\right)^2(k+1)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 [(k-3)^2 + 2k^2]$

soit $3(k+1)^2 = (k-3)^2 + 2k^2$ donc $3(k^2 + 2k + 1) = k^2 - 6k + 9 + 2k^2$ donc $6k + 3 = -6k + 9$ donc $k = \frac{1}{2}$ donc Ω a pour coordonnées $\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right)$.

EXERCICE 2 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. *a*. Le plan P a pour vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées (1 ; $\sqrt{3}$; – 2)

Le plan Q a pour vecteur normal $\vec{n'}$ de coordonnées (2 ; 0 ; – 1). Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc P et Q ne sont pas parallèles.

b. La droite Δ intersection des plans P et Q a pour équations : $\begin{cases} x + \sqrt{3}\, y - 2\, z = 0 \\ 2\, x - z = 0 \end{cases}$

en posant $x = t$, la deuxième équation donne $2\, t - z = 0$ soit $z = 2\, t$, en remplaçant dans la première équation : $t + \sqrt{3}\, y - 4\, t = 0$

soit $\sqrt{3}\, y = 3\, t$ donc $y = \sqrt{3}\, t$

Un système d'équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans P et Q est $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}\ t \\ z = 2\, t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

c. Le cône de révolution Γ d'axe (O*x*) a une équation de la forme : $y^2 + z^2 = a^2 x^2$

Il contient la droite Δ comme génératrice donc contient le point de paramètre $t = 1$ donc de coordonnées (1 ; $\sqrt{3}$; 2), donc $3 + 4 = a^2$

$a^2 = 7$ donc Γ, a pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7\, x^2$.

2. L'intersection du cône Γ avec un plan d'équation $x = k$ est une courbe telle que : $\begin{cases} 7\, x^2 = y^2 + z^2 \\ x = k \end{cases}$ soit $\begin{cases} y^2 + z^2 = 7\, k^2 \\ x = k \end{cases}$

Dans le plan P d'équation $x = k$, l'intersection de Γ et de P est un cercle.

L'intersection du cône Γ avec un plan d'équation $y = k$ est une courbe telle que : $\begin{cases} 7\, x^2 = y^2 + z^2 \\ y = k \end{cases}$ soit $\begin{cases} 7\, x^2 - z^2 = k^2 \\ y = k \end{cases}$

soit $\begin{cases} (\sqrt{7}\ x - z\,)\,(\sqrt{7}\ x - z\,) = k^2 \\ y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X\ Z = k^2 \\ y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z = \dfrac{k^2}{X} \\ y = k \end{cases}$

Dans le plan P d'équation $x = k$, l'intersection de Γ et de P est un hyperbole
de même pour le plan d'équation $z = k$.

3. *a*. Soit *x* un entier relatif,

x est congru modulo 7 à	0	1	2	3	4	5	6
x^2 est congru modulo 7 à	0	1	4	2	2	4	1

donc l'équation $x^2 \equiv 3$ [7], dont l'inconnue *x* est un entier relatif, n'a pas de solution.

b. D'après la question précédente a^2 et b^2 sont congrus à 0 ; 1 ; 2 ou 4 modulo 7 donc :

b^2 \ a^2	0	1	2	4
0	0	1	2	4
1	1	2	3	5
2	2	3	4	6
4	4	5	6	1

pour tous entiers relatifs *a* et *b*, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a^2 et 7 divise b^2 d'après la question précédente, si 7 divise a^2 alors 7 divise *a* et si 7 divise b^2 alors 7 divise *b* donc pour tous entiers relatifs *a* et *b*, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise *a* et 7 divise *b*.

4. *a*. Si le point A à coordonnées entières (*a*, *b*, *c*) est un point du cône Γ alors $b^2 + c^2 = 7\, a^2$ donc d'après la question précédente, 7 divise *b* et 7 divise *c*.

Il existe donc deux entiers naturels strictement positifs α et β tels que $b = 7^{\beta}\, q$ avec 7 et *q* premiers entre eux, et $c = 7^{\gamma} q'$ avec 7 et *q*' premiers entre eux.

Soit δ le plus petit des deux nombres β et γ, (β ≥ δ et γ ≥ δ) donc $b^2 + c^2 = 7^{2\beta}\, q^2 + 7^{2\gamma}\, q'^2 = 7^{2\delta}\,(7^{2(\beta-\delta}q^2 + 7^{2(\gamma-\delta)}q'^2)$

donc $7^{2\delta-1}\,(7^{2(\beta-\delta}q^2 + 7^{2(\gamma-\delta)}q'^2) = a^2$

$2\,\delta - 1 > 0$ donc 7 divise a^2 donc d'après la question 3 *a*. 7 divise *a*.

b. Supposons $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$

7 divise *a* donc il existe un entier strictement positif α et un entier *k* non nul tel que $a = 7^{\alpha}\, k$ avec 7 et *k* premiers entre eux

donc $7^{2\delta-1}\,(7^{2(\beta-\delta)}q^2 + 7^{2(\gamma-\delta)}q'^2) = 7^{2\alpha}\, k^2$

si $2\,\alpha > 2\,\delta - 1$ alors $7^{2(\beta-\delta)}q^2 + 7^{2(\gamma-\delta)}q'^2 = 7^{2(\alpha-\delta)+1}\, k^2$

Sans diminuer la généralité, on peut supposer que δ = β donc $q^2 + 7^{2(\gamma-\delta)}q'^2 = 7^{2(\alpha-\delta)+1}\, k^2$

si α = β alors 7 divise $q^2 + q'^2$ donc d'après la question 3. *b*. 7 divise *q* et *q*', ce qui est exclu car 7 et *q* sont premiers entre eux

si α > β alors 7 divise q^2 donc d'après la question 3. *a*. 7 divise *q*, ce qui est exclu car 7 et *q* sont premiers entre eux

si $2\,\alpha < 2\,\beta - 1$ alors $7^{2(\beta-\alpha)-1}\, q^2 + 7^{2(\gamma-\alpha)-1}\, q'^2 = k^2$ donc 7 divise k^2, ce qui est exclu car 7 et *k* sont premiers entre eux

donc *a* = 0 et *b* = 0 et *c* = 0, le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

PROBLEME

Partie A

1. $y' = a\,y \Leftrightarrow y(t) = \mathrm{C}\,e^{a\,t}$

f est solution de (E) donc f est de la forme : $f(t) = \mathrm{C}\,e^{a\,t}$; $f(0) = \mathrm{N}_0$ donc $\mathrm{C}\,e^{a\times 0} = \mathrm{N}_0$ or $e^0 = 1$ donc $\mathrm{C} = \mathrm{N}_0$ donc $f(t) = \mathrm{N}_0\,e^{a\,t}$

2. Au bout du temps T, la population a doublé donc $f(\mathrm{T}) = 2\,\mathrm{N}_0$ donc $f(\mathrm{T}) = 2\,\mathrm{N}_0 = \mathrm{N}_0\,e^{a\,\mathrm{T}}$ donc $e^{a\,\mathrm{T}} = 2$ donc $a\,\mathrm{T} = \ln 2$ donc $a = \dfrac{1}{\mathrm{T}}\ln 2$ donc $f(t) = \mathrm{N}_0\;e^{\frac{1}{\mathrm{T}}\ln 2\times t}$ soit $f(t) = \mathrm{N}_0\left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{t}{\mathrm{T}}}$ or $e^{\ln 2} = 2$ donc $f(t) = \mathrm{N}_0\;2^{\frac{t}{\mathrm{T}}}$.

Partie B

1. Soit $h(t) = \dfrac{1}{g(t)}$ alors $h'(t) = -\dfrac{g'(t)}{g^2(t)}$ or $g'(t) = a\,g(t)\left(1-\dfrac{g(t)}{\mathrm{M}}\right)$ donc $\dfrac{g'(t)}{g^2(t)} = a\left(\dfrac{1}{g(t)}-\dfrac{1}{\mathrm{M}}\right) = a\left(h(t)-\dfrac{1}{\mathrm{M}}\right)$

donc $h'(t) = -a\left(h(t)-\dfrac{1}{\mathrm{M}}\right)$ soit $h'(t) + a\,h(t) = \dfrac{a}{\mathrm{M}}$ or $h = \dfrac{1}{g}$ donc la fonction $\dfrac{1}{g}$ est solution de l'équation (E') : $y' + a\,y = \dfrac{a}{\mathrm{M}}$.

1. *b*. (E') : $y' + a\,y = \dfrac{a}{\mathrm{M}} \Leftrightarrow y' = -a\,y + \dfrac{a}{\mathrm{M}} \Leftrightarrow y(t) = \mathrm{C}\,e^{-a\,t} + \dfrac{1}{\mathrm{M}}$.

1. *c*. Soit $g(t) = \dfrac{1}{h(t)}$ alors $g'(t) = -\dfrac{h'(t)}{h^2(t)}$ or $h'(t) = -a\,h(t) + \dfrac{a}{\mathrm{M}}$ donc $-\dfrac{h'(t)}{h^2(t)} = a\,\dfrac{1}{h(t)}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{M}\,h(t)}\right) = a\,g(t)\left(1-\dfrac{g(t)}{\mathrm{M}}\right)$

donc $g'(t) = a\,g(t)\left(1-\dfrac{g(t)}{\mathrm{M}}\right)$ or $g = \dfrac{1}{h}$ donc la fonction $\dfrac{1}{h}$ est solution de l'équation (E) : $g'(t) = a\,g(t)\left(1-\dfrac{g(t)}{\mathrm{M}}\right)$

Il manque une question : en déduire la forme générale des solutions de (E)

g solution de (E) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{g}$ solution de (E') $\Leftrightarrow$ $= \mathrm{C}\,e^{-a\,t} + \dfrac{1}{\mathrm{M}} \Leftrightarrow g(t) =$ $\Leftrightarrow g(t) =$ où C est une constante réelle quelconque $\Leftrightarrow g(t) =$ où k est une constante réelle quelconque.

2. *a*. $g(t) =$ or $a > 0$ donc $- a\,t = -\infty$ or $e^x = 0$ donc $1 + \mathrm{C}\,e^{-a\,t} = 1$ donc $g(t) = \mathrm{M}$

C > 0 et une exponentielle est toujours positive donc $\mathrm{C}\,e^{-a\,t} > 0$ donc $1 + \mathrm{C}\,e^{-a\,t} > 1$ donc $0 <$ < 1

or M > 0 donc $0 <$ $< \mathrm{M}$ soit $0 < g(t) < \mathrm{M}$.

2. *b*. Pour tout $t \geq 0$, $0 < g(t) < \mathrm{M}$ donc $0 <$ < 1 soit $a\,g(t)\left(1-\dfrac{g(t)}{\mathrm{M}}\right) > 0$ donc $g'(t) > 0$ donc g est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [.

$g(0) =$ or C > 1 donc 1 + C > 2 soit $<$.

g est définie continue strictement croissante sur [0 ; + ∞ [, g([0 ; + ∞ [) = donc $\in g$([0 ; + ∞ [) donc l'équation $g(t) =$ admet une solution unique t_0 dans [0 ; + ∞[.

2. *c*. Pour tout t de [0 ; + ∞ [, $g'(t) = a\,g(t)$ donc $g'(t) = a$

donc $g''(t) = a$ soit $g''(t) = a\,g'(t)$

g est croissante sur [0 ; + ∞ [donc si $0 \leq t \leq t_0$ alors $g(t) \leq g(t_0)$ soit $0 \leq g(t) \leq$ donc $0 \leq$ ≤ 1 donc $1 -$ ≥ 0

or $g'(t) > 0$ sur [0 ; + ∞ [donc $g''(t) \geq 0$ sur [0 ; t_0]

si $t_0 < t$ alors $g(t_0) < g(t)$ soit $< g(t)$ donc $1 <$ donc $1 -$ ≤ 0 or $g'(t) > 0$ sur $[0 ; +\infty[$ donc $g''(t) \leq 0$ sur $[t_0 ; +\infty[$.

$g''(t) \leq 0$ sur $[t_0 ; +\infty[$ donc g' est décroissante sur $[t_0 ; +\infty[$

$g(t) =$ donc $g'(t) =$

$g(t_0) =$ $=$ $\Leftrightarrow 1 + C$ $= 2 \Leftrightarrow C$ $= 1 \Leftrightarrow$ $=$ $\Leftrightarrow$ $= C \Leftrightarrow a\, t_0 = \ln C \Leftrightarrow t_0 =$ ln C.

d. N = donc t_0 N = M donc t_0 N = M

t_0 N = [ln (+ C) – ln (C + 1)] or = C donc t_0 N = [ln (2 C) – ln (C + 1)] donc N = [ln (2 C) – ln (C + 1)]

<u>Partie C</u>

1. 1. $f(t) = N_0$ $= N_0$ donc $f(0) = 1 \Leftrightarrow N_0\, e^0 = 1 \Leftrightarrow N_0 = 1$

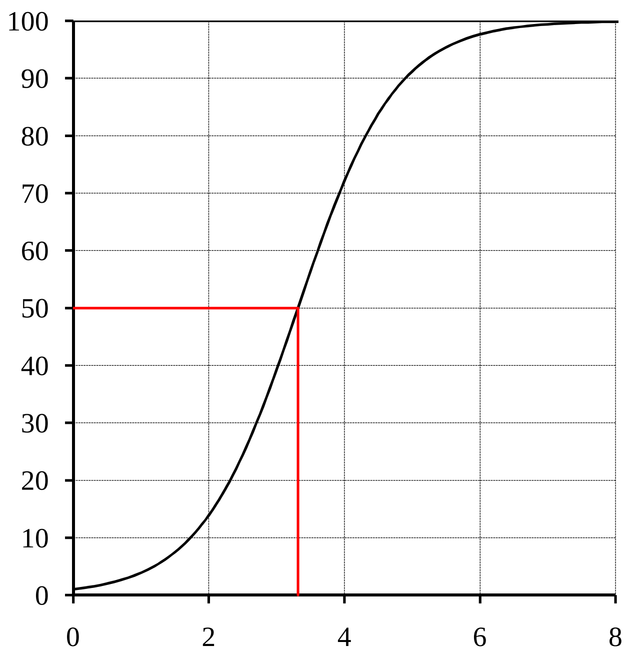
Au bout d’un temps 0,5 la population a doublé donc T = 0,5 et $a =$ ln 2 = 2 ln 2

2. d’après le tableau : $g(0) = 1$ donc $N_0 = 1$, a est le réel défini en partie A donc $a = 2 \ln 2 = \ln 4$

$g(0) =$ = 1 et M = 100 N_0 = 100 donc = 1 donc 100 = 1 + C donc C = 99.

$g(t) =$ or $e^{-t \ln 4} = (e^{\ln 4})^{-t} = 4^{-t}$ donc $g(t) =$.

3. $g(t)$ = M = 100 donc la courbe admet la droite $y = 100$ pour asymptote en $+\infty$.



$t_0 =$ ln C = donc t_0 est l’abscisse du point d’ordonnée 50 de la courbe.

4. Le premier modèle est adapté sur une brève durée : moins d’une heure, dans ce cas l’approximation est très bonne, après 2 heures, l’approximation est trop importante.