Partie A
Résoudre dans C l'équation $z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0$

Partie B
Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité 2 cm) on considère les points A d'affixe $e^{-i\theta}$, B d'affixe $e^{-i\theta}$ et M d'affixe $-1 + 2e^{i\theta}$ Soit C le cercle de centre O et de rayon 1 et C' le cercle de centre Ω d'affixe (– 1) et de rayon 2

1. *a.* Montrer que A et B sont deux points de C et M est un point de C'

***b*.** Montrer que les droites (OA) et (ΩM) sont parallèles

***c*.** Tracer C, C' puis placer les points A, B et M lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Lorsque θ décrit l'intervalle [0 ; π] le point M décrit le demi-cercle (C') formé des points d'ordonnées positives Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à l'aire du triangle MAB

2. Dans cette question uniquement, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ Soit H le pied de la hauteur issue de M du triangle MAB

***a*.** Donner l'affixe du point H

b. Calculer l'aire du triangle en cm^2

3. On note S(θ) l'aire du triangle MAB, exprimée en cm^2

a. Démontrer que $S(\theta) = 4\sin\theta\,(1 - \cos\theta)$

b. Montrer que S est dérivable sur [0 ; π] et que pour tout θ ∈ [0 ; π] la dérivée S' de S s'écrit $S'(\theta) = 4(1 - \cos\theta)(1 + 2\cos\theta)$

c. Résoudre dans [0 ; π] l'inéquation $1 + 2\cos\theta \geq 0$

d. Déduire des questions précédentes que lorsque θ décrit l'intervalle [0 ; π] l'aire S(θ) admet un maximum que l'on précisera Construire le triangle correspondant

CORRECTION

Partie A
$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4(1 - \cos^2\theta) = -4\sin^2\theta$ donc les solutions de l'équation $z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0$ sont :

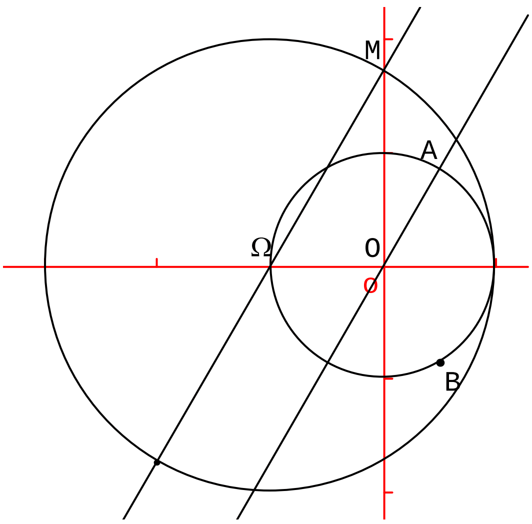
$$z_1 = \frac{2\cos\theta + i\,2\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Partie B

1. *a.* $OA = |z_A| = |e^{i\theta}| = 1$ et $OB = |z_B| = |e^{-i\theta}| = 1$ donc A et B sont deux points de C
$\Omega M = |z_M - z_\Omega| = |2e^{i\theta}| = 2$ donc M est un point de C'.

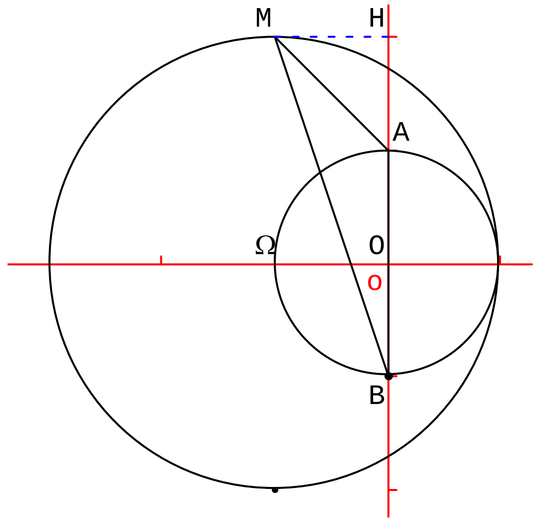
***b*.** La droite (OA) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{OA}$ d'affixe $e^{i\theta}$
La droite (ΩM) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\Omega M}$ d'affixe $2e^{i\theta}$ donc $\overrightarrow{\Omega M} = 2\,\overrightarrow{OA}$
donc les droites (OA) et (ΩM) sont parallèles.

***c*.** Le point M appartient à C' et les droites (ΩM) et (OA) sont parallèles donc M est l'un des deux points d'intersection de la parallèle en Ω à (OA) et du cercle C'.
$\overrightarrow{\Omega M} = 2\,\overrightarrow{OA}$ donc les vecteurs sont colinéaires et de même sens d'où le choix de M.



2. $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ donc A a pour affixe i, B a pour affixe – i

M a pour affixe – 1 + 2 i



a. H le pied de la hauteur issue de M du triangle MAB donc H est la projection orthogonale de M sur l'axe des imaginaires donc H a pour affixe 2 i

b. MH = 1 et AB = 2

L'aire du triangle MAB est égale à $\dfrac{1}{2} \times \text{MH} \times \text{AB} = \dfrac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$ unité d'aire.

le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ d'unité 2 cm donc une unité d'aire est 4 cm^2 donc l'aire du triangle MAB est égale à 4 cm^2.

3. *a.* M a pour coordonnées (– 1 + 2 cos θ ; 2 sin θ)

La droite (AB) a pour équation x = cos θ donc le point H projection de M sur (AB) a la même ordonnée que M et une abscisse égale à cos θ.

$\overrightarrow{\text{MH}}$ a pour coordonnées (1 – cos θ ; 0) or pour tout θ réel – 1 ≤ cos θ ≤ 1 donc 1 – cos θ ≥ 0 donc MH = 1 – cos θ

$\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées (0 ; 2 sin θ) or θ ∈ [0 ; π] donc sin θ ≥ 0 donc MH = 2 sin θ

S(θ) = $\dfrac{1}{2}$ × MH × AB = $\dfrac{1}{2}$ (1 – cos θ) × 2 sin θ donc S(θ) = sin θ (1 – cos θ) en unités d'aires.

Une unité d'aire est 4 cm^2 donc en cm^2, S(θ) = 4 sin θ (1 – cos θ)

b. Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur R donc sur [0 ; π] donc la fonction S est dérivable sur [0 ; π].

$\begin{cases} u(\theta) = 4\sin\theta & u'(\theta) = 4\cos\theta \\ v(\theta) = 1 - \cos\theta & v'(\theta) = \sin\theta \end{cases}$ donc S'(θ) = 4 cos θ (1 – cos θ) + 4 sin^2 θ

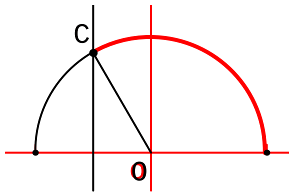
S'(θ) = 4 cos θ – 4 cos^2 θ + 4 sin^2 θ or sin^2 θ + cos^2 θ = 1 donc sin^2 θ = 1 – cos^2 θ

S'(θ) = 4 cos θ – 4 cos^2 θ + 4 (1 – cos^2 θ)

S'(θ) = 4 (1 + cos θ – 2 cos^2 θ)

(1 – cos θ) (1 + 2 cos θ) = 1 + 2 cos θ – cos θ – 2 cos^2 θ = 1 + cos θ – 2 cos^2 θ donc S'(θ) = 4 (1 – cos θ) (1 + 2 cos θ)

c. Soit la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$, elle coupe le demi-cercle en C, l'angle $\widehat{\text{AOC}}$ a pour mesure $\dfrac{2\pi}{3}$. Pour tout θ de $\left[0\,;\dfrac{2\pi}{3}\right]$, $\cos\theta \geq -\dfrac{1}{2}$ donc 1 + 2 cos θ ≥ 0

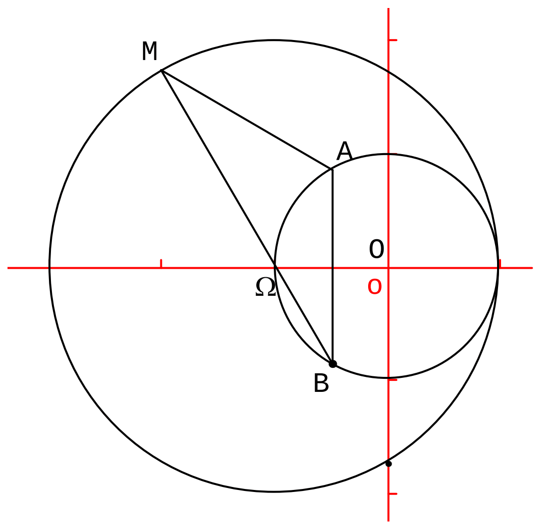


Pour tout θ de $\left[\dfrac{2\pi}{3}\,;\pi\right]$, $\cos\theta \leq -\dfrac{1}{2}$ donc 1 + 2 cos θ ≤ 0

Dans [0 ; π] 1 + 2 cos θ ≥ 0 ⇔ θ ∈ $\left[0\,;\dfrac{2\pi}{3}\right]$,

d. Pour tout θ réel 1 – cos θ ≥ 0 donc S'(θ) a le même signe que 1 + 2 cos θ

θ	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
1 + 2 cos θ		+	0	–	
S'(θ)	0	+	0	–	
S	0	↗		↘	0



S est croissante sur $\left[0\,;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{2\pi}{3}\,;\pi\right]$ donc S admet un maximum en $\dfrac{2\pi}{3}$.

$S\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 4\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\left(1 - \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = 4\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)$ donc $S\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$.

Le triangle MAB a une aire maximale égale à $3\sqrt{3}$.