Métropole & La Réunion Septembre 2007

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Les parties 1 et 2 portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

1. Restitution organisée de connaissances

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue.
On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si vraie ou fausse et justifier.
Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.
– P : Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur R, de dérivée f' donnée sur R par : $f'(x) = n\,x^{n-1}$.
– Q : Soit u une fonction dérivable sur R et soit f la fonction définie sur R par $f = u^n$; alors f est dérivable sur R, de dérivée f' donnée par $f' = n\,u^{n-1}$.

2. On désigne par g la fonction définie sur $]-1\,;1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\,;1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.
On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi\,;0[$ par $h(x) = g(\cos x)$.

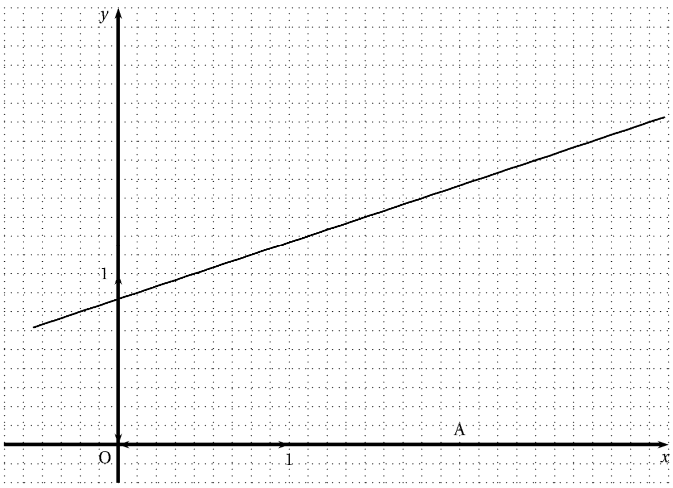
a. Démontrer que pour tout x de $]-\pi\,;0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.

b. Calculer $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$, puis donner l'expression de $h(x)$.

EXERCICE 2 6 points Commun à tous les candidats

1. La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.

a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan en annexe, la droite d'équation $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{23}{27}$ et le point A de coordonnées (2 ; 0).
Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.



b. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $\ell = \dfrac{23}{18}$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq \dfrac{23}{18}$.

d. Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

2. *a*. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$ c'est-à-dire que $\dfrac{1}{10^2}+\dfrac{1}{10^3}+\ldots+\dfrac{1}{10^{n+1}} = \dfrac{1}{90}\left(1-\dfrac{1}{10^n}\right)$

b. La suite v est définie par $v_n = 1{,}277\,7\ldots7$ avec n décimales consécutives égales à 7. Ainsi $v_0 = 1{,}2$, $v_1 = 1{,}27$ et $v_2 = 1{,}277$.
En utilisant le *a* démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3. La suite u définie au 1 et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

EXERCICE 3 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2\,\mathrm{i}$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.
3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z. Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).
5. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z^{2\,007}$.

EXERCICE 3 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

a. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau figurant en annexe l'unique élément y de A_7 tel que $a\,y \equiv 1$ (modulo 7).

b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3\,x \equiv 5$ (modulo 7) équivaut à $x \equiv 4$ (modulo 7).

c. Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $a\,x \equiv 0$ (modulo 7) sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On considère l'ensemble $A_p = \{1 ; 2 ; ... ; p - 1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p.

Soit a un élément de A_p.

a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $a\,x \equiv 1$ (modulo p).

b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p, de l'équation $a\,x \equiv 1$ (modulo p).

c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $x\,y \equiv 0$ (modulo p) si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p.

d. Application : $p = 31$. Résoudre dans A_{31} les équations : $2\,x \equiv 1$ (modulo 31) et $3\,x \equiv 1$ (modulo 31).

À l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $6\,x^2 - 5\,x + 1 \equiv 0$ (modulo 31).

Annexe :

a	1	2	3	4	5	6
y						6

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E) : y' + (1 + \tan x)\,y = \cos x$$
$$(E_0) : y' + y = 1.$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).
2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et telles que $f(x) = g(x)\cos x$.

Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).

3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

1. Restitution organisée de connaissances

P est vraie :

$(x_0 + h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} = x_0^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x_0^{n-k}$ donc

$\dfrac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x_0^{n-k} = \binom{n}{1} x_0^{n-1} + h \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-2} x_0^{n-k}$

donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \binom{n}{1} x_0^{n-1} + h \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-2} x_0^{n-k} = \binom{n}{1} x_0^{n-1} = n\, x_0^{n-1}$

D'après la définition du nombre dérivé de la fonction x^n en un point x_0 alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = n\, x_0^{n-1}$.

Q est fausse : Il s'agit de la dérivée d'une fonction composée et $f' = n\, u'\, u^{n-1}$.

2. *a.* pour tout x de $]-\pi ; 0[$ on a $h'(x) = g'(\cos x) \times (-\sin x) = \dfrac{-\sin x}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} = \dfrac{-\sin x}{\sqrt{(\sin x)^2}}$

pour tout x de $]-\pi ; 0[$, $\sin x < 0$ donc $\sqrt{(\sin x)^2} = -\sin x$ et $h'(x) = \dfrac{-\sin x}{-\sin x} = 1$.

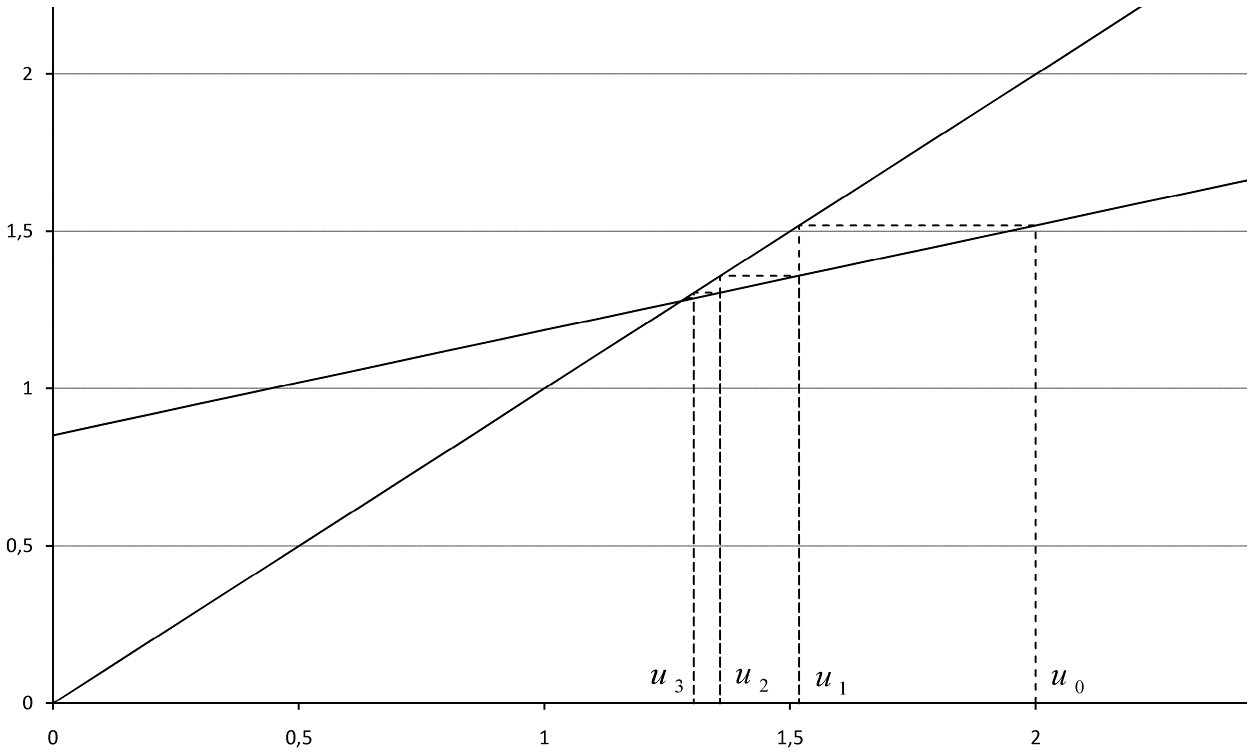
b. $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = g\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = g(0) = 0$

$h'(x) = 1$ donc h est une primitive de 1 donc il existe une constante réelle C telle que $h(x) = x + C$

$h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ donc $-\dfrac{\pi}{2} + C = 0$ donc $C = \dfrac{\pi}{2}$, pour tout x de $]-\pi ; 0[$ on a $h(x) = x + \dfrac{\pi}{2}$

EXERCICE 2 **6 points** **Commun à tous les candidats**

1. *a*.



c. $u_0 = 2$ donc $u_0 \geq \dfrac{23}{18}$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété est héréditaire : c'est-à-dire que si $u_n \geq \dfrac{23}{18}$ alors $u_{n+1} \geq \dfrac{23}{18}$

$u_n \geq \dfrac{23}{18}$ donc $\dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27} \geq \dfrac{1}{3} \times \dfrac{23}{18} + \dfrac{23}{27}$ or $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{23}{18} + \dfrac{23}{27} = \dfrac{23}{18}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$ donc $u_{n+1} \geq \dfrac{23}{18}$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

d. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27} - u_n = -\dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$ donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{23}{18} - u_n\right)$ or $u_n \geq \dfrac{23}{18}$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$

La suite (u_n) est décroissante.

La suite (u_n) est décroissante minorée par $\dfrac{23}{18}$ donc est convergente et sa limite est supérieure ou égale à $\dfrac{23}{18}$.

2. *a*. Soit $q = \dfrac{1}{10}$; $\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \ldots + \dfrac{1}{10^{n+1}} = \dfrac{1}{10^2}\left(1 + q + \ldots + q^{n-1}\right)$

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{10^2} \times \frac{1 - q^n}{1 - q} \Leftrightarrow \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{10^2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{100 - 10} \Leftrightarrow \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

b. $v = 1{,}2 + 0{,}07 + 0{,}007 + \ldots + 0{,}0\ldots07$

$v = 1{,}2 + \dfrac{7}{100} + \dfrac{7}{1000} + \ldots + \dfrac{7}{10^{n+1}}$ donc $v = 1{,}2 + 7\left(\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \ldots + \dfrac{1}{10^{n+1}}\right)$ soit $v = 1{,}2 + \dfrac{7}{90}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$

$v = \dfrac{6}{5} + \dfrac{7}{90}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$ or $\dfrac{6}{5}$ et $\dfrac{7}{90}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$ sont des nombres rationnels donc v est un nombre rationnel.

3. La suite v est croissante, la suite u est décroissante

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{6}{5} + \dfrac{7}{90}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right) = \dfrac{6}{5} + \dfrac{7}{90} = \dfrac{23}{18}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$ donc les suite u et v sont adjacentes.

EXERCICE 3 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2\,\mathrm{i}$ donc $Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}\,(1+\mathrm{i}\sqrt{3})}{2\,(1+\mathrm{i})} = \dfrac{\sqrt{2}\,(1+\mathrm{i}\sqrt{3})\,(1-\mathrm{i})}{2\,(1+\mathrm{i})\,(1-\mathrm{i})} = \dfrac{\sqrt{2}\,[\,(1+\sqrt{3}) + \mathrm{i}\,(\sqrt{3}-1)]}{4}$

$Z = \dfrac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}$

2. $|z_1|^2 = 2 + 6 = 8$ donc $|z_1| = 2\sqrt{2}$ et $|z_2|^2 = 4 + 4 = 8$ donc $|z_2| = 2\sqrt{2}$

$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\,[\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)]$ donc $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\,[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)]$ donc $\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$|Z| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ soit $|Z| = 1$

$\arg Z = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ donc $\arg Z = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ soit $\arg Z = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

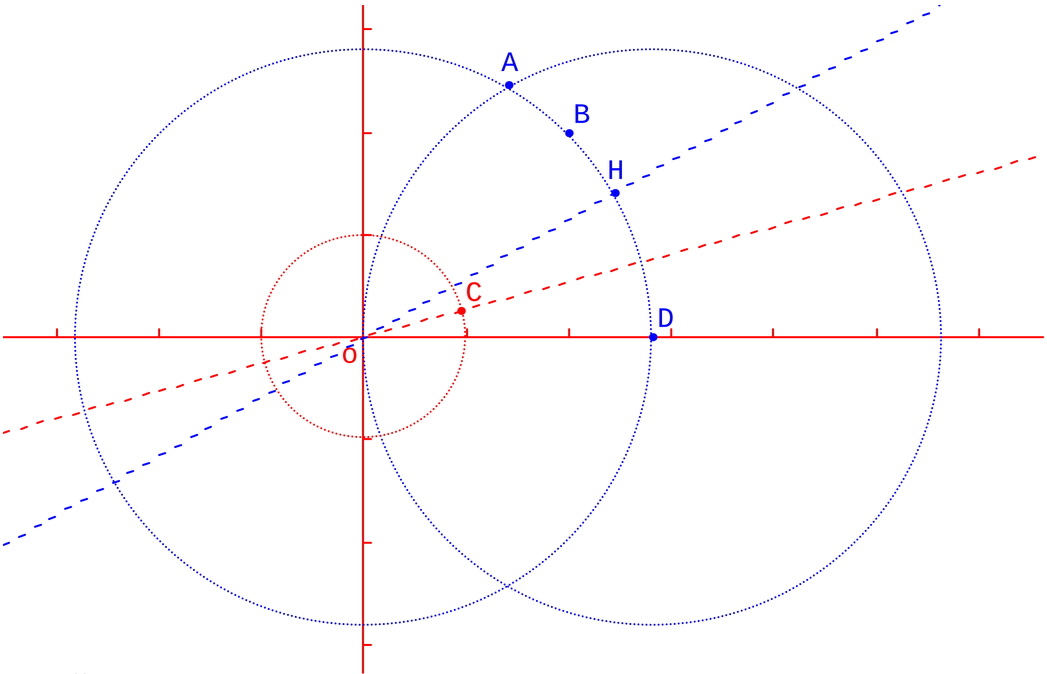
3. $|Z| = 1$ et $\arg Z = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ donc $Z = \cos\dfrac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}$

En égalant les parties réelles et imaginaires : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}$

4.

Le point B se place sans construction particulière, plaçons sur le cercle C de centre O passant par B les points A tels que l'angle $\widehat{\mathrm{DOA}}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$, la bissectrice de $\widehat{\mathrm{DOA}}$ coupe le cercle C en H tel que $\widehat{\mathrm{DOH}}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{6}$,

La bissectrice de $\widehat{\mathrm{DOA}}$ coupe le cercle de centre O de rayon 1 en C tel que $\widehat{\mathrm{DOC}}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{12}$.



5. $|Z| = 1$ donc $|Z^{2\,007}| = 1$

$\arg Z = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ donc $\arg Z^{2\,007} = 2\,007\arg Z$ soit $\arg Z^{2\,007} = 2\,007\,\dfrac{\pi}{12} + 2 \times 2\,007\,k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$2\,007 = 24 \times 83 + 15$ donc $2\,007\,\dfrac{\pi}{12} = 83 \times 2\pi + 15\,\dfrac{\pi}{12}$ donc $\arg Z^{2\,007} = \dfrac{5\pi}{4}$ à 2π près

$Z^{2\,007} = \cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}$

EXERCICE 3 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* $4 \times 2 = 8$ donc $4 \times 2 \equiv 1$ (modulo 7)
$3 \times 5 = 15 = 2 \times 7 + 1$ donc $3 \times 5 \equiv 1$ (modulo 7)
$6 \times 6 = 36 = 7 \times 5 + 1$ donc $6 \times 6 \equiv 1$ (modulo 7)

a	1	2	3	4	5	6
y	1	4	5	2	3	6

b. $3x \equiv 5$ (modulo 7) $\Leftrightarrow 5 \times 3x \equiv 5 \times 5$ (modulo 7) or $15 \equiv 1$ (modulo 7) et $25 = 3 \times 7 + 4$ donc $25 \equiv 4$ (modulo 7)
$3x \equiv 5$ (modulo 7) $\Leftrightarrow x \equiv 4$ (modulo 7)

c. Si $a\,x \equiv 0$ (modulo 7) $\Leftrightarrow$ 7 divise $a\,x$ or 7 est premier avec a donc d'après le théorème de Gauss, 7 divise x.

2. *a.* p est un nombre premier, $1 \leq a \leq p - 1$ donc p et a sont premiers entre eux donc d'après le petit théorème de Fermat, $a^{p-1} \equiv 1$ (modulo p)
soit $a \times a^{p-2} \equiv 1$ (modulo p) donc a^{p-2} est une solution de l'équation a $x \equiv 1$ (modulo p).

b. r est le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p, donc $0 \leq r < p$
p et a sont premiers entre eux donc p ne divise pas a donc $r \neq 0$ donc $1 \leq r \leq p - 1$ donc $r \in A_p$

$a^{p-2} = p\,q + r$ donc $a \times a^{p-2} = a\,p\,q + a\,r$ donc $a \times a^{p-2} \equiv a\,r$ (modulo p)
donc a^{p-2} étant solution de l'équation a $x \equiv 1$ (modulo p), $a\,r \equiv 1$ (modulo p) donc r est solution de l'équation a $x \equiv 1$ (modulo p).

Supposons qu'il existe une seconde solution r' appartenant à A_p de l'équation a $x \equiv 1$ (modulo r)
$a\,r \equiv 1$ (modulo p) et $a\,r' \equiv 1$ (modulo p) donc par différence membre à membre : $a\,(r - r') \equiv 0$ (modulo p) donc p divise $a\,(r - r')$
p et a sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss p divise $r - r'$
or $|\,r - r'\,| < p$ donc si $r - r' \neq 0$ alors $r - r'$ et p sont premiers entre eux, ce qui n'est pas possibles donc $r - r' = 0$
donc r est l'unique solution x dans A_p, de l'équation a $x \equiv 1$ (modulo p).

c. Soient x et y deux entiers relatifs, soient r et r' les restes respectifs de la division de x et y par p
Si x est un multiple de p alors $x \equiv 0$ (modulo p) donc $x\,y \equiv 0$ (modulo p) de même si y est un multiple de p

Si ni x ni y ne sont des multiples de p alors r et r' de A_p et $x \equiv r$ (modulo p) et $y \equiv r'$ (modulo p) alors $x\,y \equiv r\,r'$ (modulo p)
$x\,y \equiv 0$ (modulo p) $\Leftrightarrow r\,r' \equiv 0$ (modulo p) $\Leftrightarrow p$ divise $r\,r'$
$1 \leq r \leq p - 1$ donc r et p sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, p divise r'
or $1 \leq r' \leq p - 1$ donc r' et p sont premiers entre eux donc il est impossible que $r\,r' \equiv 0$ (modulo p)
$x\,y \equiv 0$ (modulo p) si et seulement si x est un multiple de p où y est un multiple de p.

d. Deux méthodes : l'une basique :
D'après la question 2. *a.*, si p est un nombre premier, l'équation a $x \equiv 1$ (modulo p) admet une unique solution dans A_p or 31 est un nombre premier donc $2x \equiv 1$ (modulo 31) admet une unique solution dans A_{31}
or $2 \times 16 = 31 + 1$ donc $2 \times 16 \equiv 1$ (modulo 31) donc $x = 16$ est solution dans A_{31} de $2x \equiv 1$ (modulo 31)

de même $3x \equiv 1$ (modulo 31) admet une unique solution dans A_{31}
$3 \times 21 = 63 = 2 \times 31 + 1$ donc $3 \times 21 \equiv 1$ (modulo 31) donc $x = 21$ est solution dans A_{31} de $3x \equiv 1$ (modulo 31)

Autre méthode utilisant plus l'énoncé.
Si p est un nombre premier et $a \in A_p$, a^{p-2} est solution de l'équation a $x \equiv 1$ (modulo p), donc ici 2^{29} est solution de l'équation $2x \equiv 1$ (modulo 31), et 3^{29} est solution de l'équation $3x \equiv 1$ (modulo 31).
D'après la question 2. *b.* si p est un nombre premier, si r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p alors r est l'unique solution x dans A_p, de l'équation a $x \equiv 1$ (modulo p).
donc 31 étant un nombre premier, le reste de la division de 2^{29} par 31 est l'unique solution x dans A_{31}, de l'équation $2x \equiv 1$ (modulo 31).
de même le reste de la division de 3^{29} par 31 est l'unique solution x dans A_{31}, de l'équation $3x \equiv 1$ (modulo 31).
$2^{29} \equiv 16$ (modulo 31) et $2^{29} \equiv 21$ (modulo 31) donc les solutions dans A_{31} de $2x \equiv 1$ (modulo 31) et de $3x \equiv 1$ (modulo 31) sont respectivement 16 et 21.

Or $6x^2 - 5x + 1 = (2x - 1)(3x - 1)$
D'après la question 2. *c.* p étant un nombre premier, $x\,y \equiv 0$ (modulo p) si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p
$(2x - 1)(3x - 1) \equiv 0$ (modulo 31) $\Leftrightarrow 2x - 1 \equiv 0$ (modulo 31) ou $3x - 1 \equiv 0$ (modulo 31)
$\Leftrightarrow 2x \equiv 1$ (modulo 31) ou $3x \equiv 1$ (modulo 31)
$\Leftrightarrow 16 \times 2x \equiv 16$ (modulo 31) ou $21 \times 3x \equiv 21$ (modulo 31)
$\Leftrightarrow x \equiv 16$ (modulo 31) ou $x \equiv 21$ (modulo 31)
$\Leftrightarrow x = 31k + 16$ ou $x = 31k + 21$ avec $k \in \mathbb{Z}$

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

1. Une fonction constante g solution de (E_0) vérifie $g' = 0$ et $g' + g = 1$ donc $g = 1$

Les solutions de $y' + y = 0$ sont les solutions de $y' = -y$ donc les solutions de $y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme $k\,e^{-x}$ où k est un nombre réel.

Les solutions de (E_0) sont les fonction de la forme $f(x) = 1 + k\,e^{-x}$ où k est un nombre réel.

2. $f(x) = g(x)\cos x$ de la forme $u\,v$ or $(u\,v)' = u'\,v + v'\,u$

Soit $u(x) = g(x)$ $u'(x) = g'(x)$

$v(x) = \cos x$ $v'(x) = -\sin x$ donc $f'(x) = g'(x)\cos x - g(x)\sin x$

f est solution de (E) $\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $f'(x) + (1 + \tan x)\,f(x) = \cos x$

$\Leftrightarrow$ pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x)\cos x - g(x)\sin x + (1 + \tan x)\,g(x)\cos x = \cos x$

or $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ soit $(1 + \tan x)\cos x = \cos x + \sin x$

f est solution de (E) $\Leftrightarrow g'(x)\cos x - g(x)\sin x + (\cos x + \sin x)\,g(x) = \cos x$ pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$

f est solution de (E) $\Leftrightarrow g'(x)\cos x + \cos x\,g(x) = \cos x$ pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ $\Leftrightarrow [g'(x) + g(x) - 1]\cos x = 0$ pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$

or pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x \neq 0$ donc f est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $g'(x) + g(x) - 1 = 0$ pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$

f est solution de (E) $\Leftrightarrow g$ solution de (E_0)

3. f est solution de (E) $\Leftrightarrow g$ solution de $(E_0) \Leftrightarrow g(x) = 1 + k\,e^{-x}$ or $f(x) = g(x)\cos x$

f est solution de (E) $\Leftrightarrow f(x) = (1 + k\,e^{-x})\cos x$

$f(0) = 0$ donc $(1 + k\,e^{0})\cos 0 = 1 + k = 0$ soit $k = -1$

f est solution de (E) et $f(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) = (1 - e^{-x})\cos x$