L'exercice porte sur l'équation dans $\mathbb{R}$: (E) : $2\cos^2 x + (2 - \sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} = 0$

Si on pose X = cos x, que devient (E) ?

Montrer que $(2 - \sqrt{3})^2 + 8\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$

Résoudre l'équation en X, en déduire les solutions de (E).

Utiliser un raisonnement analogue pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (F) : $2\sin^2 x - 1 = 0$.

CORRECTION

(E) : $2\cos^2 x + (2 - \sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} = 0$

Si on pose X = cos x, (E) devient : $2X^2 + (2 - \sqrt{3})X - \sqrt{3} = 0$

$(2 - \sqrt{3})^2 + 8\sqrt{3} = 4 - 4\sqrt{3} + 3 + 8\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = (2 + \sqrt{3})^2$

$\Delta = (2 - \sqrt{3})^2 + 8\sqrt{3}$ donc $\Delta = (2 + \sqrt{3})^2$

$X_1 = \dfrac{-(2 - \sqrt{3}) + 2 + \sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$X_2 = \dfrac{-(2 - \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3})}{4} = -1$

Si x est solution de (E) alors $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -1$

$\cos x = \cos\dfrac{\pi}{3}$ donc $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\cos x = \cos\pi$ donc $x = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de (E) sont : $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si on pose X = sin x, (F) devient : $2X^2 - 1 = 0$ soit $X^2 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4}$

donc $X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $X = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Si x est solution de (F) alors $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4}$ donc $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\sin\dfrac{\pi}{4}$ donc $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de (F) sont : $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.