ABC est un triangle équilatérale de côté de longueur ℓ

quels est l'ensemble des point M tels que : $(\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\,).(\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 2\,\ell^2$

CORRECTION

soit B' le milieu de [AC]

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MB'}$

donc soit I le milieu de [B'B] alors $\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MB'} + 2\,\overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$

$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MB'} - 2\,\overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{BB'}$

donc $(\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\,).(\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 2\,\ell^2 \Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{MI}.2\,\overrightarrow{BB'} = 2\,\ell^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}\ell^2$

Soit H la projection orthogonale de M sur (BB')

$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}\ell^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{HI}.\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}\ell^2$ donc les vecteurs $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont colinéaires de même sens donc :

$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}\ell^2 \Leftrightarrow HI \times BB' = \frac{1}{2}\ell^2$ or BB' est la hauteur du triangle équilatéral donc BB' = $\frac{\sqrt{3}}{2}\ell$

$HI \times BB' = \frac{1}{2}\ell^2 \Leftrightarrow HI \times \frac{\sqrt{3}}{2}\ell = \frac{1}{2}\ell^2 \Leftrightarrow HI = \frac{1}{\sqrt{3}}\ell$

Tous les points M cherchés ont la même projection orthogonale sur (BB') donc l'ensemble des points M cherchés est la droite perpendiculaire en H à (BB').