Antilles ES 97

Une grave maladie affecte le cheptel bovin d'un certain pays. On estime que 7 % des bovins sont atteints.
On vient de mettre au point un test pour diagnostiquer la maladie, on a établi que,

- quand un animal est malade, le test est positif dans 87% des cas,
- quand un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 98% des cas.

On note F l'événement "être malade" et T l'événement "avoir un test positif".
Calculez la probabilité des trois événements suivants :
" F et T" ; " $\overline{F}$ et $\overline{T}$ " ; " F et $\overline{T}$ "
Déduisez-en la probabilité de T.
Quelle est la probabilité pour qu'un animal ayant un test négatif soit malade ?

CORRECTION

Commençons par traduire en probabilité, les hypothèses de l'énoncé.
On sait quand un animal est malade, le test est positif dans 87% des cas.
Cela se traduit par : p(T sachant F) = $p(T / F) = 0{,}87$
On sait aussi que 7% des bovins sont malades, ce qui se traduit par :
$p(F) = 0{,}07$ donc $p(\overline{F}) = 0{,}93$
On peut aussi dire que p($\overline{T}$ sachant $\overline{F}$) = 0,98
donc p(T sachant $\overline{F}$) = 1 – 0,98 = 0,02.
1. *a* : D'après le principe des Probabilités Conditionnelles, la probabilité de l'événement "F et T " est égale à :
$p(F \cap T) = p(T / F) \times p(F)$
Donc, cette probabilité est égale à :
$p(F \cap T) = 0{,}87 \times 0{,}07 = 0{,}0609$
b : De même,
$p(\overline{F} \cap \overline{T}) = p(\overline{T} / \overline{F}) \times p(\overline{F}) = 0{,}98 \times 0{,}93 = 0{,}9114$.
c : $p(F \cap \overline{T}) = p(\overline{T} / F) \times p(F) = [1 - p(T / F)] \times p(F)$
$p(F \cap \overline{T}) = 0{,}13 \times 0{,}07 = 0{,}0091$.

On peut alors résumer ces résultats dans le tableau suivant :

	F	$\overline{F}$	Probabilité
T	0,0609	0,0186	0,0795
$\overline{T}$	0,0091	0,9114	0,9205
Probabilité	0,07	0,93	1

2. On sait que : $p(T) = p(F \cap T) + p(\overline{F} \cap T)$
d'après la Loi Des Probabilités Totales
donc $p(T) = 0{,}0609 + 0{,}0186 = 0{,}0795$.

3. La probabilité qu'un animal ayant un test négatif soit malade est : $p(F / \overline{T}) = \dfrac{p(F \cap \overline{T})}{p(\overline{T})}$

Donc , on a : $p(F / \overline{T}) = \dfrac{0{,}0091}{0{,}9205} = 0{,}0098859$