1. On désigne par g la fonction numérique définie sur $[0 ; \pi]$ par : $g(x) = x \cos x - \sin x$.
Étudier g et dresser son tableau de variation.
En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0 ; \pi]$.

2. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0 ; \pi]$ par : $\begin{cases} \text{si } x = 0, & f(0) = 1 \\ \text{si } x \in]0 ; \pi], & f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \end{cases}$

On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Étudier les variations de f sur $]0 ; \pi]$.

3. Étude de f en 0

a. Prouver que, pour tout nombre réel $x \geq 0$: $0 \leq x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$

(Pour cela, on introduira la fonction φ définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$

on calculera les dérivées φ', φ'' et φ''' et on en déduira le signe de φ.)

b. Prouver que f est dérivable au point 0 et calculer $f'(0)$.

4. Construire la courbe représentative (C) de la fonction f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra 3 cm pour unité.)
On tracera les tangentes connues.

CORRECTION

1. $g'(x) = 1 \times \cos x + x \times (-\sin x) - \cos x$ donc $g'(x) = -x \sin x$
$x \in [0 ; \pi]$ donc $\sin x \geq 0$

x	0		π
$g'(x)$	0	$-$	0
g	0	$\searrow$	$-\pi$

g est strictement décroissante sur $[0\ \pi]$ et $g(0) = 0$ donc pour tout x de $[0 ; \pi]$, $g(x) \leq 0$

2. si $x\ ]0 ; \pi]$, $f'(x) = \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

Pour tout x de $]0 ; \pi]$, $g(x) < 0$ donc pour tout x de $]0 ; \pi]$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0 ; \pi]$.

3. *a*. $\varphi'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ donc $\varphi''(x) = (\varphi'(x))' = -\sin x + x$

$\varphi'''(x) = (\varphi''(x))' = -\cos x + 1$

Pour tout x de $[0 ; +\infty[$ $\cos x \leq 1$ donc $\varphi'''(x) \geq 0$; φ''' est la dérivée de φ'' donc φ'' est croissante sur $[0 ; +\infty[$

$\varphi''(0) = 0$ donc pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $\varphi''(x) \geq 0$ donc pour tout $x \geq 0$, $x - \sin x \geq 0$

Pour tout x de $[0 ; +\infty[$ $\varphi''(x) \geq 0$

φ'' est la dérivée de φ' donc φ' est croissante sur $[0 ; +\infty[$

$\varphi'(0) = 0$ donc pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $\varphi'(x) \geq 0$

Pour tout x de $[0 ; +\infty[$ $\varphi'(x) \geq 0$ donc φ est croissante sur $[0 ; +\infty[$

$\varphi(0) = 0$ donc pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $\varphi(x) \geq 0$

soit $\sin x - x + \dfrac{x^3}{6} \geq 0$ donc $\dfrac{x^3}{6} \geq x - \sin x$ donc pour tout nombre réel $x \geq 0$, $0 \leq x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$

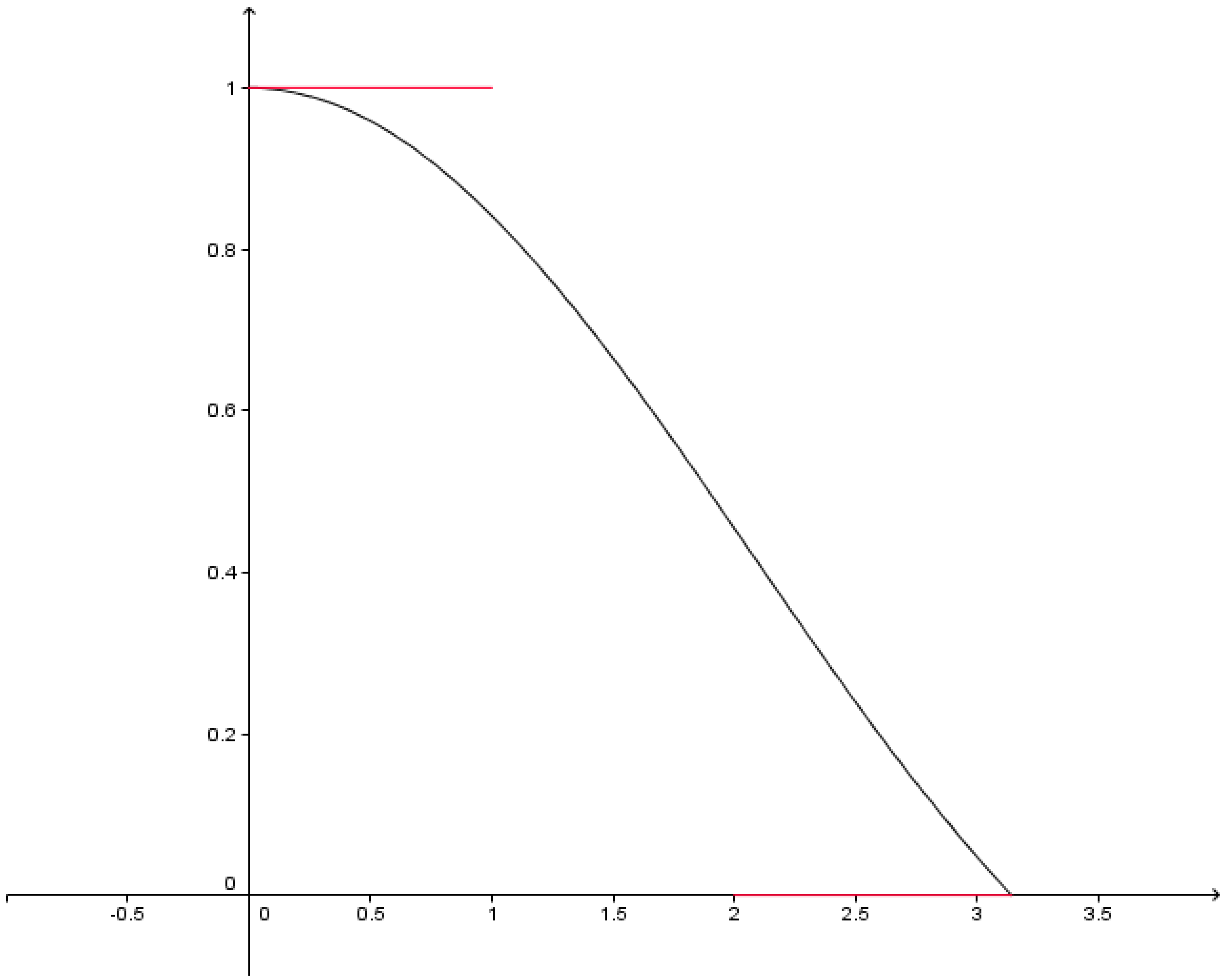
b. $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\dfrac{\sin x}{x} - 1}{x} = \dfrac{\sin x - x}{x^2}$ or pour tout nombre réel $x \geq 0$, $0 \leq x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$ donc $-\dfrac{x^3}{6} \leq \sin x - x \leq 0$

si $x \neq 0$, $x^2 > 0$, donc $-\dfrac{x}{6} \leq \dfrac{\sin x - x}{x^2} \leq 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x}{6} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\sin x - x}{x^2} = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

4.

x	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	π
$f(x)$	1	0,97	0,90	0,78	0,62	0,45	0,28	0,12	0


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5