Exercice 1 (6 points) Commun à tous les candidats
Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.
Partie 1
1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif donné.
On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \lambda \, e^{-\lambda x}.$$

a. Soit c et d deux réels tels que $0 \leq c < d$.
Démontrer que la probabilité $P(c \leq X \leq d)$ vérifie $P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.
b. Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.
c. Donner l'espérance de la variable aléatoire X.

Dans la suite de l'exercice on prend λ = 0,15.

d. Calculer $P(10 \leq X \leq 20)$.
e. Calculer la probabilité de l'événement $(X > 18)$.
2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type 1,95.
a. Calculer la probabilité de l'événement $(20 \leq Y \leq 21)$.
b. Calculer la probabilité de l'événement $(Y < 11) \cup (Y > 21)$.
Partie 2
Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.
Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.
Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec une probabilité égale à 0,067 ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.
De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à 0,015 et 0,010 ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.
1. Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.
2. Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut 0,057.

Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

3. Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 €.
Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne. Ses doutes sont-ils justifiés ?

Exercice 2 (3 points) Commun à tous les candidats
Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A(0 ; – 1 ; 5), B(2 ; – 1 ; 5) , C(11 ; 0 ; 1) , D(11 ; 4 ; 4).
Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde. Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.
On admet que M_t et N_t ont pour coordonnées : $M_t(t ; -1 ; 5)$ et $N_t(11 ; 0{,}8\,t ; 1 + 0{,}6\,t)$.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
1. *a.* La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?
b. La droite (CD) se trouve dans un plan P parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan P.
c. Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan P, coupe ce plan au point E (11 ; – 1 ; 5).
d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?
2. *a.* Montrer que $M_tN_t^{\,2} = 2\,t^2 - 25{,}2\,t + 138$.
b. À quel instant t la longueur M_tN_t, est-elle minimale ?

Exercice 3 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.
1. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z : $z^2 - 8z + 64 = 0$
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\,i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\,i\sqrt{3}$ et $c = 8\,i$.
a. Calculer le module et un argument du nombre a.
b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.
c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
d. Placer les points A, B et C dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2. *d.* complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = a\,e^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\,e^{i\frac{\pi}{3}}$
a. Montrer que $b' = 8$.

b. Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\,\mathrm{i}\sqrt{3}$, et $c' = -4\sqrt{3} + 4\,\mathrm{i}$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment [MN] a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.

On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A'B], [B'C] et [C'A].

a. Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\,(2 + 2\sqrt{3})$.

b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

Exercice 3 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans Z : $7x - 5y = 1$.

a. Vérifier que le couple (3 ; 4) est solution de (E).

b. Montrer que le couple d'entiers $(x\,;y)$ est solution de (E) si et seulement si $7(x-3) = 5(y-4)$.

c. Montrer que les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. Sachant que $7x - 5y = 1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. On considère la marche aléatoire suivante d'un pion sur un triangle ABC. À chaque étape, on tire au hasard un des jetons parmi les 25, puis on le remet dans la boîte.

Lorsqu'on est en A :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en B. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en A.

Lorsqu'on est en B :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en B.

Lorsqu'on est en C :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en B. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en C.

Au départ, le pion est sur le sommet A.

Pour tout entier naturel n, on note a_n, b_n et c_n les probabilités que le pion soit respectivement sur les sommets A, B et C à l'étape n.

On note X la matrice ligne $(a_n \;\; b_n \;\; c_n)$ et T la matrice $\begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}12 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}72 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}16 & 0{,}72 \end{pmatrix}$.

Donner la matrice ligne X_0 et montrer que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n T$.

4. On admet que $T = P\,D\,P^{-1}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}56 \end{pmatrix}$

a. À l'aide de la calculatrice, donner les coefficients de la matrice P. On pourra remarquer qu'ils sont entiers.

b. Montrer que $T^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

c. Donner sans justification les coefficients de la matrice D^n.

On note α_n, β_n, γ_n les coefficients de la première ligne de la matrice T^n ainsi : $T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$.

On admet que $\alpha_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0{,}6^n$ et $\beta_n = \dfrac{37 - 77 \times 0{,}6^n + 40 \times 0{,}56^n}{110}$

On ne cherchera pas à calculer les coefficients de la deuxième ligne ni ceux de la troisième ligne.

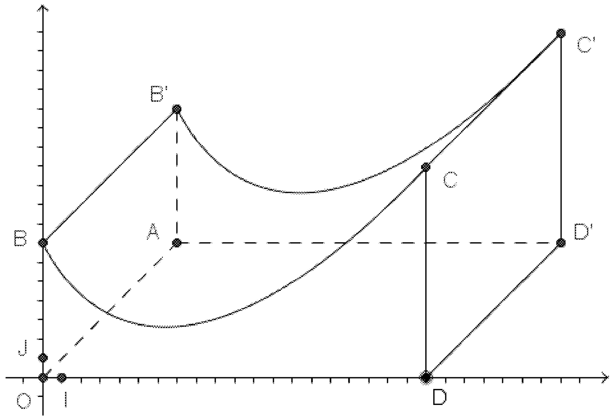
5. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0\,T^n$.

a. Déterminer les nombres a_n, b_n à l'aide des coefficients α_n et β_n. En déduire c_n.

b. Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

c. Sur quel sommet a-t-on le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire ?

Exercice 4 (6 points) Commun à tous les candidats



Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.
Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière.
Les quadrilatères OAD'D, DD'C'C, et OAB'B sont des rectangles.
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, DD' = 10, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but du problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.
Le profil du module de skateboard *a* été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 20] par :

$$f(x) = (x + 1) \ln (x + 1) - 3x + 7$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et **C** la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J).

Partie 1

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 20] , on a $f'(x) = \ln (x + 1) - 2$.

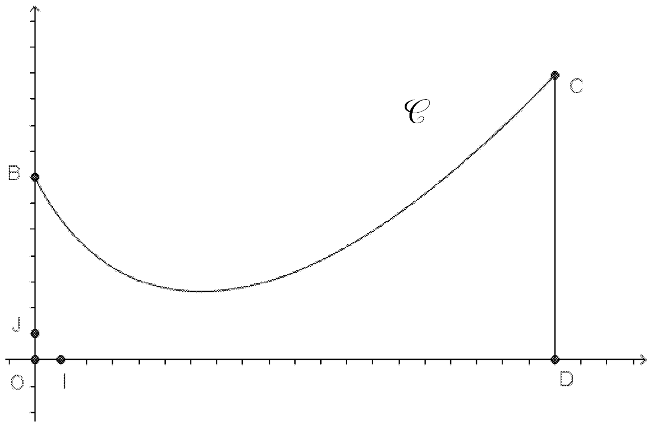
2. En déduire les variations de f sur l'intervalle [0 ; 20] et dresser son tableau de variation.

3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.
La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 20] par $g(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 \ln (x + 1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle [0 ; 20] par

$$g'(x) = (x + 1) \ln (x + 1).$$

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 20].

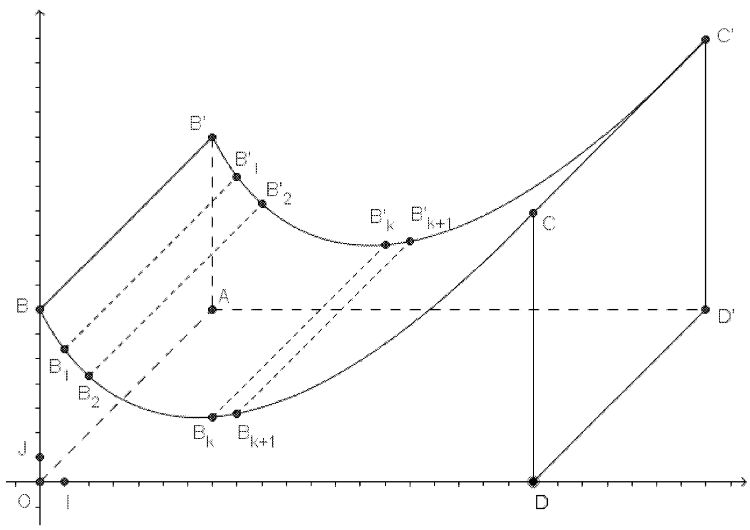


Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes.

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ?
Justifier les réponses.
P1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.
P2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

2. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre.
Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.**3.** On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.
Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k ; f(k))$ pour k variant de 0 à 20.
Ainsi, $B_0 = B$.



On décide d'approcher l'arc de la courbe allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_k B_{k+1}]$. Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_k B_{k+1} B'_{k+1} B'_k$ (voire figure).

a. Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19, $B_k B_{k+1} = \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$.

b. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables	S : réel
	K : entier
Fonction	f : définie par $f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0
	Pour K variant de ...... à. ......
	S prend pour valeur ....
	Fin Pour
Sortie	Afficher …….

CORRECTION

Exercice 1 (6 points) Commun à tous les candidats

Partie 1

1. *a.* $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_c^d$ donc $P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

b. $P(X > 20) = e^{-20\lambda} = 0{,}05$ donc $-20\lambda = \ln 0{,}05$ soit $\lambda = -\dfrac{\ln 0{,}05}{20}$ soit $\lambda \approx 0{,}149786614$ donc $\lambda \approx 0{,}150$ à 10^{-3} près

c. $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ donc $E(X) \approx 6{,}67$.

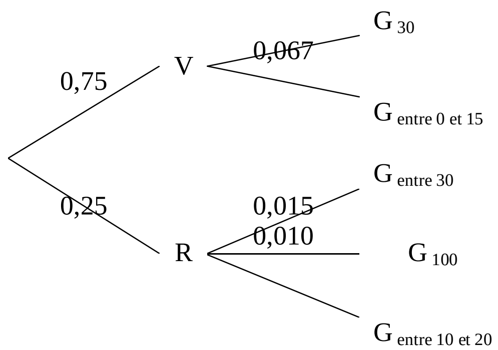
d. $P(10 \leq X \leq 20) = e^{-10\lambda} - e^{-20\lambda}$ donc $P(10 \leq X \leq 20) \approx 0{,}173$.

e. $P(X > 18) = e^{-18\lambda}$ donc $P(X > 18) \approx 0{,}067$

2. *a.* $P(20 \leq Y \leq 21) \approx 0{,}015$

b. $P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = 1 - P(11 \leq Y \leq 21)$ donc $P((Y < 11) \cup (Y > 21)) \approx 1 - 0{,}9896$ donc $P((Y < 11) \cup (Y > 21)) \approx 0{,}0104$ soit $P((Y < 11) \cup (Y > 21)) \approx 0{,}010$ à 10^{-3} près.

Partie 2



1. $P_R(G_{\geq 30}) = 0{,}015 + 0{,}010 = 0{,}025$

2. $P(G_{\geq 30}) = P(R \cap G_{\geq 30}) + P(V \cap G_{\geq 30}) = 0{,}75 \times 0{,}067 + 0{,}25 \times 0{,}025 = 0{,}0565$ soit $0{,}057$ à 10^{-3} près.

3. Soit I l'intervalle de fluctuation au risque 5 % : $I = \left[0{,}057 - \dfrac{1}{\sqrt{200}} ; 0{,}057 + \dfrac{1}{\sqrt{200}} \right]$.

I = [0,024 ; 0,090]

Sur l'échantillon considéré, la fréquence est $f = \dfrac{6}{200} = 0{,}03$ or $f \in I$ donc les doutes ne sont pas justifiés.

Exercice 2 (3 points) Commun à tous les candidats

1. *a.* $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (2 ; 0 ; 0) donc la droite (AB) est parallèle à l'axe (OI).

b. $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées (0 ; 4 ; 3). Ce vecteur est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OI}$ donc la droite (CD) se trouve dans un plan P parallèle à (OJK).
Le plan (OJK) a pour équation $x = 0$ donc tout plan parallèle à (OJK) a une équation de la forme $x = d$
C appartient à P donc $d = 11$, le plan P a pour équation $x = 11$.

c. Un vecteur normal à P est $\vec{n}$ (1 ; 0 ; 0) donc $\overrightarrow{AB} = 2\vec{n}$ donc la droite (AB), orthogonale au plan P.
Le point E (11 ; – 1 ; 5) appartient au plan P d'équation $x = 11$.

$\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées (11 ; 0 ; 0) donc $\overrightarrow{AE} = \dfrac{11}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $E \in (AB)$

E est le point d'intersection de la droite (AB) et du plan P.

d. Si les droites (AB) et (CD) sont sécantes, elles le sont en E

$\overrightarrow{CE}$ a pour coordonnées (0 ; – 1 ; 4), $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{CE}$ ($k \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -k \\ 3 = 4k \end{cases}$ ($k \in \mathbb{R}$) ce qui est impossible donc $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, E n'appartient pas à (CD), les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2. *a.* $M_t\,(t\,;-1\,;5)$ et $N_t\,(11\,;0{,}8\,t\,;1+0{,}6\,t)$ donc $M_tN_t^{\,2} = (11-t)^2 + (0{,}8\,t+1)^2 + (4-0{,}6\,t)^2$
$M_tN_t^{\,2} = 121 - 22\,t + t^2 + 0{,}64\,t^2 + 1{,}6\,t + 1 + 16 - 4{,}8\,t + 0{,}36\,t^2$
$M_tN_t^{\,2} = 2\,t^2 - 25{,}2\,t + 138$.

b. La fonction f définie par $f(t) = 2\,t^2 - 25{,}2\,t + 138$ a pour dérivée $f'(t) = 4\,t - 25{,}2$
Elle est donc croissante sur $\left[\frac{25{,}2}{4}\,;+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]\frac{25{,}2}{4}\,;+\infty\right]$, elle admet donc un minimum pour $t = \frac{25{,}2}{4}$ soit pour $t = 6{,}3$
La longueur M_tN_t, est minimale pour $t = 6{,}3$.

Exercice 3 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z : $z^2 - 8\,z + 64 = 0$

$\Delta = 8^2 - 4 \times 64 = -3 \times 64$ donc les solutions de (E) sont $z_1 = \frac{8 - i\,8\sqrt{3}}{3} = 4 - 4\,i\sqrt{3}$ et $z_2 = \frac{8 + i\,8\sqrt{3}}{3} = 4 + 4\,i\sqrt{3}$

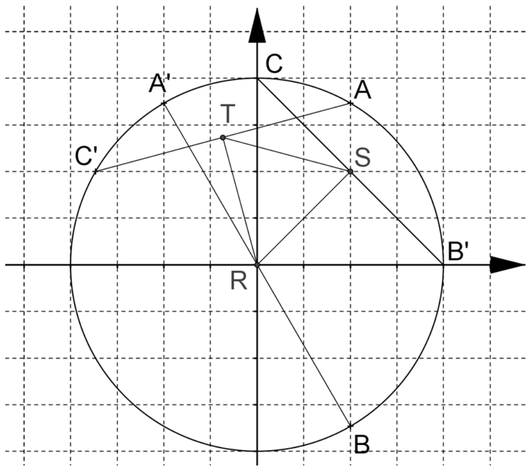
2. *a.* $|\,a\,|^2 = 4^2 + 4^2 \times 3 = 64$ donc $|\,a\,| = 8$, soit θ un argument de a

$a = 8\,(\cos\theta + i\sin\theta) = 4 + 4\,i\sqrt{3}$, donc $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ soit $\theta = \frac{\pi}{3}$

b. $a = 8\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = \overline{a} = 8\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

c. $|\,a\,| = |\,b\,| = |\,c\,| = 8$ donc OA = OB = OC = 8, A, B et C appartiennent au cercle de centre O de rayon 8.

d.



3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = a\,e^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

a. $b = 8\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc $b' = b\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 8\,e^{-i\frac{\pi}{3}}\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 8\,e^{0\,i} = 8$.

b. $a' = a\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 8\,e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 8\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
$a' = -4 + 4\,i\sqrt{3}$, et $c' = -4\sqrt{3} + 4\,i$.

4. *a.* $r = \frac{a' + b}{2} = \frac{-4 + 4\,i\sqrt{3} + 4 - 4\,i\sqrt{3}}{2} = 0$ et $s = \frac{b' + c}{2} = \frac{8 + 8\,i}{2} = 4 + 4\,i$.

b. Graphiquement le triangle RST semble être équilatéral.
$RS = |\,s - r\,| = |\,4 + 4\,i - 0\,| = 4\sqrt{2}$
$ST = |\,s - t\,| = |\,4 + 4\,i - 2 + 2\sqrt{3} - i\,(2 + 2\sqrt{3})\,| = |\,2 + 2\sqrt{3} + i\,(2 - 2\sqrt{3})\,|$
$ST^2 = (2 + 2\sqrt{3})^3 + (2 - 2\sqrt{3})^2 = 4 + 8\sqrt{3} + 12 + 4 - 8\sqrt{3} + 12 = 32$ donc $ST = 4\sqrt{2}$
$RT = |\,r - t\,| = |-2 + 2\sqrt{3} - i\,(2 + 2\sqrt{3})\,|$
$RT^2 = (-2 + 2\sqrt{3})^3 + (2 + 2\sqrt{3})^2 = 32$ donc $RT = 4\sqrt{2}$
RT = TS = ST donc le triangle RST semble être équilatéral.

Exercice 3 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans Z : $7x - 5y = 1$.

a. $7 \times 3 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1$ donc le couple (3 ; 4) est solution de (E).

b. Le couple d'entiers $(x ; y)$ est solution de (E) $\Leftrightarrow 7x - 5y = 1 \Leftrightarrow 7x - 5y = 7 \times 3 - 5 \times 4 \Leftrightarrow 7(x - 3) = 5(y - 4)$.

c. $7(x - 3) = 5(y - 4)$ donc 7 divise $5(y - 4)$ or 5 et 7 sont premiers entre eux donc 7 divise $y - 4$.
Il existe un entier k tel que $y - 4 = 7k$
En remplaçant dans $7(x - 3) = 5(y - 4)$ on a $7(x - 3) = 5 \times 7k$ donc $x - 3 = 5k$
donc $x = 5k + 3$ et $y = 7k + 4$
Si le couple d'entiers $(x ; y)$ est solution de (E) alors il existe un entier k tel que $x = 5k + 3$ et $y = 7k + 4$.

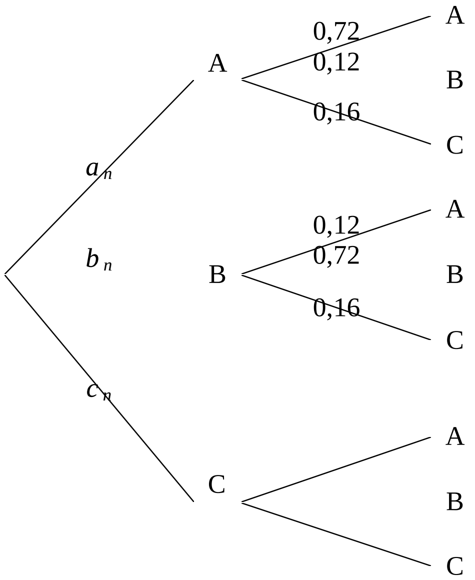
Réciproquement si $x = 5k + 3$ et $y = 7k + 4$ alors $7x - 5y = 7(5k + 3) - 5(7k + 4) = 35k + 21 - 35k - 20 = 1$ donc le couple d'entiers $(x ; y)$ est solution de (E)

Les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs tels que : $\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$

2. $7x - 5y = 1$, donc $\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$ or $0 \leq x + y \leq 25$ donc $0 \leq 12k + 7 \leq 25$ soit $-7 \leq 12k \leq 18$ donc $-\dfrac{7}{12} \leq k \leq \dfrac{3}{2}$

k est un entier donc $0 \leq k \leq 1$, k prend donc les valeurs 0 ou 1.
On peut donc avoir soit $k = 0$ et donc 3 jetons rouges et 4 jetons verts et donc 18 blancs
soit $k = 1$ et donc 8 jetons rouges et 11 jetons verts et donc 6 blancs

3. Au départ, le pion est sur le sommet A, donc $X_0 = (1 ; 0 ; 0)$.
La boîte contient 3 jetons rouges et 4 jetons verts et donc 18 blancs donc :



Lorsqu'on est en A :
Si le jeton tiré est rouge, le pion va en B. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en A.

$p_A(A) = \dfrac{18}{25} = 0{,}72$; $p_A(B) = \dfrac{3}{25} = 0{,}12$; $p_A(C) = \dfrac{4}{25} = 0{,}16$;

Lorsqu'on est en B :
Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en B.

$p_B(A) = \dfrac{3}{25} = 0{,}12$; $p_B(B) = \dfrac{18}{25} = 0{,}72$; $p_B(C) = \dfrac{4}{25} = 0{,}16$;

Lorsqu'on est en C :
Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en B. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en C.

$p_C(A) = \dfrac{3}{25} = 0{,}12$; $p_C(B) = \dfrac{4}{25} = 0{,}16$; $p_C(C) = \dfrac{18}{25} = 0{,}72$.

$a_{n+1} = 0{,}72\, a_n + 0{,}12\, b_n + 0{,}12\, c_n$
$b_{n+1} = 0{,}12\, a_n + 0{,}72\, b_n + 0{,}16\, c_n$
$c_{n+1} = 0{,}16\, a_n + 0{,}16\, b_n + 0{,}72\, c_n$ donc pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n T$.

4. *a.* À l'aide de la calculatrice, $P = (P^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$

b. **Initialisation :** pour $n = 0$, $T^0 = D^0 = I$ et $P D^n P^{-1} = P \times P^{-1} = I = T^0$ la propriété est initialisée.
Hérédité : montrons pour tout n de N, que si $T^n = P D^n P^{-1}$ alors $T^{n+1} = P D^{n+1} P^{-1}$
$T^{n+1} = T^n \times T = P D^n P^{-1} \times P D P^{-1}$ or $P^{-1} \times P = I$ donc $T^{n+1} = P D^n D P^{-1}$ donc $T^{n+1} = P D^{n+1} P^{-1}$
La propriété est héréditaire et initialisée donc pour tout n de N, $T^n = P D^n P^{-1}$.

c. $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}56^n \end{pmatrix}$

5. *a.* $X_n = X_0 T^n = (1\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = (\alpha_n\ \ \beta_n\ \ \gamma_n)$

$a_n = \alpha_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$ et $b_n = \beta_n = \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$ de plus $a_n + b_n + c_n = 1$ donc $c_n = 1 - \alpha_n - \beta_n$

$\alpha_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$ et $\beta_n = \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$

b. $-1 < 0,6 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{3}{10}$

$-1 < 0,56 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,56^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \dfrac{37}{110}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 1 - \lim\limits_{n \to +\infty} a_n - \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 1 - \dfrac{3}{10} - \dfrac{37}{110} = \dfrac{4}{11}$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n > \lim\limits_{n \to +\infty} b_n > \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ donc on a le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire sur le sommet C.

Exercice 4 (6 points) Commun à tous les candidats

Partie 1

1. $\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) & u'(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ v(x) = (x+1) & v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $f'(x) = \ln(x + 1) + \dfrac{1}{x+1}(x + 1) - 3$ donc $f'(x) = \ln(x + 1) - 2$.

2. $f'(x) = \ln(x + 1) - 2$ donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x + 1) > 2 \Leftrightarrow x + 1 > e^2 \Leftrightarrow x > e^2 - 1$

x	0		$e^2 - 1$		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	7	$\searrow$	$10 - e^2$	$\nearrow$	$f(20)$

$f(20) = 21 \ln 20 - 53$

3. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0 est $f'(0) = -2$.

4. La fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 20] par $g(x) = \dfrac{1}{2}(x + 1)^2 \ln(x + 1) - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x$ a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle [0 ; 20] par $g'(x) = (x + 1) \ln(x + 1)$ donc est une primitive de g'.

Une primitive de f est donc $F(x) = g(x) - \dfrac{3}{2}x^2 + 7x$ soit $F(x) = \dfrac{1}{2}(x + 1)^2 \ln(x + 1) - \dfrac{7}{4}x^2 + \dfrac{13}{2}x$

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes.

1. P1 : VRAIE

La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est égal à $f(20) - f(e^2 - 1)$ soit environ 8,32 au moins égale à 8 mètres.

P2 : VRAIE

L'inclinaison de la piste en B est $|f'(0)|$ soit 2, l'inclinaison de la piste en C est $|f'(20)|$ soit environ 1,04 donc l'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

2. L'aire A_1 de la face latérale OBCD est l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 20$ donc est égale à $\displaystyle\int_0^{20} f(x)\,dx = F(20) - F(0)$ soit $\dfrac{1}{2} \times 21^2 \ln(21) - 700 + 130$ soit $\dfrac{441 \ln(21)}{2} - 570$ *u. a.*

L'aire de $OAB'B$ est $A_2 = 10 \times 7 = 70\ m^2$

L'aire de $DD'C'C$ est $A_3 = 10 \times f(20) \approx 109,3\ m^2$.

La surface à peindre est donc de $2 \times A_1 + A_2 + A_3 \approx 381,9\ m^2$.

Or 1 litre de peinture couvre $5\ m^2$ et $\dfrac{381,9}{5} \approx 76,38$. Il faut donc prévoir au minimum 77 litres de peinture

3. *a.* $B_k B_{k+1}^{\ 2} = (k + 1 - k)^2 + (f(k + 1) - f(k))^2 = 1 + (f(k + 1) - f(k))^2$ donc $B_k B_{k+1} = \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$.

b. .

Variables	S : réel K : entier
Fonction	f : définie par $f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de 0 à 19 S prend pour valeur S + $\sqrt{1+(f(k+1)-f(k))^2}$ Fin Pour
Sortie	Afficher S