Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \bmod 10\,000$.

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.

2. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 \bmod 16$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1. *a.* Démontrer que u_0 est divisible par 5.

b. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n\left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right]$$

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

2. *a.* Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1 \bmod 625$.

b. Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009 \bmod 625$.

Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10 000.

2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.

CORRECTION

Partie A

1. $2\,009 = 16 \times 125 + 9$ donc $2\,009 \equiv 9 \bmod 16$ donc $2\,009^2 \equiv 9^2 \bmod 16$ or $81 = 5 \times 16 + 1$ donc $81 \equiv 1 \bmod 16$

le reste de la division euclidienne de $2\,009^2$ par 16 est 1

2. $8\,000 = 2 \times 4\,000$ or $2\,009^{8\,000} = (2009^2)^{4000}$ donc $2\,009^{8\,000} \equiv 1^{4\,000} \bmod 16$ soit $2\,009^{8\,000} \equiv 1 \bmod 16$

$2\,009^{8\,001} = 2\,009^{8\,000} \times 2\,009$ donc $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \bmod 16$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2\,009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1. *a.* $2\,009 \equiv 1 \bmod 5$ donc $2\,009^2 \equiv 1 \bmod 5$ donc $2\,009^2 - 1$ est divisible par 5. u_0 est divisible par 5.

b. $(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4 b + \binom{5}{2}a^3 b^2 + \binom{5}{3}a^2 b^3 + \binom{5}{4}a b^4 + \binom{5}{5}b^5$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$

$(a+1)^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$ donc $(a+1)^5 - 1 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a = a\,[a^4 + 5a^3 + 10a^2 + 10a + 5\,]$

donc $(a+1)^5 - 1 = a\,[a^4 + 5(a^3 + 2a^2 + 2a + 1)]$ donc $u_{n+1} = u_n\left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right]$

c. Vérification : u_0 est divisible par 5 donc par 5^{0+1}. La propriété est vraie pour $n = 0$

Hérédité : Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si u_n est divisible par 5^{n+1} alors u_{n+1} est divisible par 5^{n+2}.

u_n est divisible par 5^{n+1} donc 5 divise u_n donc 5 divise u_n^4 et donc $u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)$

donc il existe un entier relatif q tel que $u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right) = 5q$ donc en remplaçant :

u_n est divisible par 5^{n+1} donc il existe un entier relatif Q tel que $u_n = 5^{n+1}\,Q$

en remplaçant dans u_{n+1} : $u_{n+1} = u_n\left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right] = 5^{n+1} \times 5\,Q\,q = 5^{n+2}\,q\,Q$

$q\,Q$ est un entier relatif donc u_{n+1} est divisible par 5^{n+2}.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. *a.* Vérifier que $u_3 = 2\,009^{250} - 1$ puis en déduire que $2\,009^{250} \equiv 1 \bmod 625$.

$u_1 = (u_0 + 1)^5 - 1 = (2\,009^2 - 1 + 1)^5 - 1 = 2\,009^{10} - 1$

$u_2 = (u_1 + 1)^5 - 1 = (2\,009^{10} - 1 + 1)^5 - 1 = 2\,009^{50} - 1$

$u_3 = (u_2 + 1)^5 - 1 = (2\,009^{50} - 1 + 1)^5 - 1 = 2\,009^{250} - 1$

D'après la question précédente, u_3 est divisible par 5^4 donc par 625 donc $2\,009^{250} - 1 \equiv 0 \bmod 625$ soit $2\,009^{250} \equiv 1 \bmod 625$.

b. $2\,009^{250} \equiv 1 \bmod 625$ donc $(2\,009^{250})^{32} \equiv 1 \bmod 325$ soit $2\,009^{8\,000} \equiv 1 \bmod 625$ soit $2\,009^{8\,000} \times 2\,009 \equiv 2\,009 \bmod 625$

$2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \bmod 625$

Partie C

1. $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \bmod 16$ et $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \bmod 625$ donc 16 divise $2\,009^{8\,001} - 2\,009$ et 625 divise $2\,009^{8\,001} - 2\,009$

16 et 625 sont premiers entre eux donc 16×325 divise $2\,009^{8\,001} - 2\,009$ soit 10 000 divise $2\,009^{8\,001} - 2\,009$.

2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.

$2\,009^{8\,001} - 2\,009 \equiv 0 \bmod 10\,000$ donc l'écriture décimale de $2\,009^{8\,001}$ se termine par 2 009.

or $8\,001 = 3 \times 2\,667$ donc $2\,009^{8\,001} = (2\,009^{2\,667})^3$ donc il existe un entier naturel : $2\,009^{2\,667}$ tel que l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.