France Métropolitaine juin 98

Dans cet exercice, A et B étant deux événements, p(A) désigne la probabilité de A ;
p(B/A) la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1 : Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité : $p_i = p(X = i)$ et $p_0 = 0{,}1$; $p_1 = 0{,}5$; $p_2 = 0{,}5$

a : Définir et représentez graphiquement la fonction de répartition de X.

b : Calculez l'espérance mathématique de X

2 : Dans cette station service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant des autres clients.

On considère les événements suivants :

C_1:" En cinq minutes, un seul client se présente" ;

C_2:" En cinq minutes, deux clients se présentent";

E :" En cinq minutes, un seul client achète de l'essence".

a : Calculer $p(C_1 \text{ et } E)$.

b : Montrer que $p(E / C_2) = 0{,}42$ et calculez $p(C_2 \text{ et } E)$.

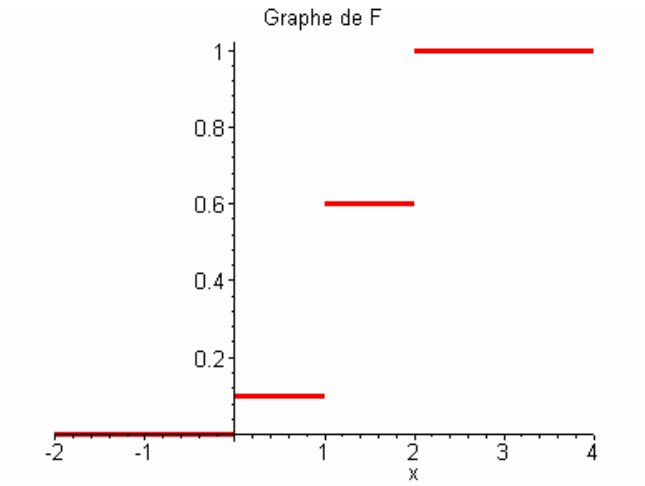
c : En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

3 : Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes.

Déterminer la loi de Y

CORRECTION

1 : *a* : La fonction de répartition F de X est définie par : $F(x) = p(X \leq x)$. D'où :
$F(x) = 0$ pour $x < 0$;
$F(x) = 0{,}1$ pour x dans $[0 ; 1[$;
$F(x) = 0{,}6$ pour x dans $[1 ; 2[$;
$F(x) = 1$ pour x supérieur ou égal à 2.



b : L'espérance de X est E[X] = 1,3

2 : *a* : $p(C_1 \text{ et } E) = p(E / C_1).p(C_1) = 0{,}7 \times 0{,}5 = 0{,}35$

b : $p(E / C_2) = 0{,}7 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}42$ car si 2 clients se présentent, soit le premier achète de l'essence et le second du gazole, soit le premier achète du gazole et le second de l'essence, et les choix des deux clients sont indépendants.
A partir de là, comme $p(C_2 \text{ et } E) = p(E / C_2) \times p(C_2)$, on a : $p(C_2 \text{ et } E) = 0{,}42 \times 0{,}4 = 0{,}168$

c : D'après la loi des probabilités totales, on a, en appelant C_0 l'événement " En cinq minutes, 0 client se présente" :
$p(E) = p(E \text{ et } C_0) + p(E \text{ et } C_1) + p(E \text{ et } C_2)$
$p(E) = 0 + 0{,}35 + 0{,}168 = 0{,}518$.

3 : Y peut prendre les valeurs 0 , 1 et 2.
D'après la loi des probabilités totales, on a :
$p(Y = 0) = p(Y = 0 / C_0).p(C_0) + p(Y = 0 / C_1).p(C_1) + p(Y = 0 / C_2).p(C_2)$
$p(Y = 0) = 0{,}1 + 0{,}3 \times 0{,}5 + (0{,}3)^2 \times 0{,}4$
$p(Y = 0) = 0{,}286$

$p(Y = 1) = p(E) = 0{,}518$

$p(Y = 2) = p(Y = 2 / C_0).p(C_0) + p(Y = 2 / C_1).p(C_1) + p(Y = 2 / C_2).p(C_2)$
$p(Y = 2) = 0 + 0 + (0{,}7)^2 \times 0{,}4$
$p(Y = 2) = 0{,}196$. On peut éviter le dernier calcul en remarquant que $p(Y = 2) = 1 - p(Y = 0) - p(Y = 1)$.