

Tangente à une courbe en point

Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

A un point de C d'abscisse x_0 .

M un point quelconque de C d'abscisse x .

Conséquences des hypothèses :

A un point de C d'abscisse x_0 donc $y_A = f(x_0)$

M un point de C d'abscisse x donc $y_M = f(x)$

Définition : la tangente en A à C est la position limite si elle existe de la droite (AM) quand M tend vers A .

Le coefficient directeur de (AM) est $\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

donc quand M tend vers A , son abscisse x tend vers x_0 donc le coefficient directeur de la tangente en A à C est si elle existe la limite

quand x tend vers x_0 de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

la limite quand x tend vers x_0 de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe si et seulement si f est dérivable en x_0

alors la limite quand x tend vers x_0 de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est $f'(x_0)$

Propriété : Si f est dérivable en x_0 , la tangente en A à C a pour coefficient directeur $f'(x_0)$.

Cas particuliers :

1. la tangente en A à C est la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) = 0$

2. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$, f n'est pas dérivable en x_0 , mais la tangente à C en A est la droite verticale d'équation $x = x_0$

Conséquences :

Parallélisme : la tangente en A est parallèle à la droite d'équation $y = mx + p \Leftrightarrow$ leurs coefficients directeurs sont égaux $\Leftrightarrow f'(x_0) = m$
Pour chercher le point A tel que la tangente en A soit parallèle à la droite d'équation $y = mx + p$, il suffit de résoudre l'équation $f'(x) = m$

Les solutions trouvées donnent les différentes valeurs possibles de x_0 .

Orthogonalité : la tangente en A est perpendiculaire à la droite d'équation $y = mx + p \Leftrightarrow$ le produit de leurs coefficients directeurs est égal à $-1 \Leftrightarrow m \times f'(x_0) = -1$

Pour chercher le point A tel que la tangente en A soit perpendiculaire à la droite d'équation $y = mx + p$, il suffit de résoudre l'équation $m f'(x) = -1$.

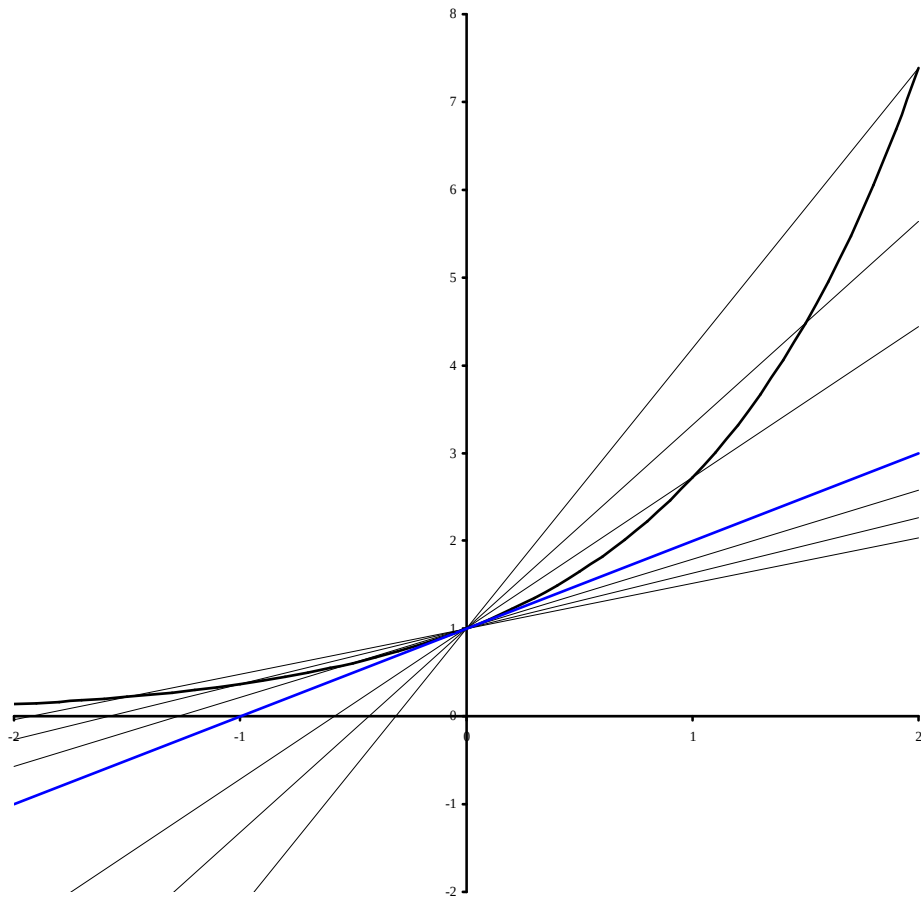
Equation : La tangente en A à C est la droite de coefficient directeur $f'(x_0)$ passant par A donc la tangente en A à C a une équation de la forme $y = f'(x_0)x + b$

on détermine b pour que la tangente passe par $A(x_0; f(x_0))$: $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$

donc $b = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$

La tangente en A à C est la droite d'équation $y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$

Propriété : La tangente en A à C est la droite d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$



Exemple de la définition :

C est la courbe représentative de la fonction exponentielle.

La droite en bleu est la tangente à la courbe en A d'abscisse 0

Ont été tracées les droites (AM) où x est successivement égal à 2 ; 1,5 ; 1 ; 0,5 puis - 1,5 ; - 1 ; - 0,5

On constate que plus x est proche de $x_0 = 0$, plus la droite (AM) est proche de la tangente en A à la courbe.

Or le coefficient directeur de la droite (AM) est $\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Si f est dérivable en x_0 , la limite de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ quand x tend vers x_0 est $f'(x_0)$ donc le coefficient directeur de la tangente en A

est $f'(x_0)$.