

Soit n un entier tel que $n \geq 9$ on considère $a = 1680^{(n)}$ et $b = 252^{(n)}$

1. Montrer que $(n + 2)$ divise a et $n + 2$ divise b
2. on pose $\alpha = 21^{(n)}$ et $\beta = 14^{(n)}$ et $d = \alpha \wedge \beta$
 - a. Montrer que d divise 7
 - b. Montrer que $7 \text{ divise } n - 3 \Leftrightarrow 7 \text{ divise } \alpha \text{ et } 7 \text{ divise } \beta$
3. Montrer que $(2n + 1)$ et n sont premiers entre eux
4. Donner $a \wedge b$ selon la valeur de n

CORRECTION

1. $a = 1680^{(n)}$ donc $a = 8n + 6n^2 + n^3 = n(n^2 + 6n + 8)$
 $n^2 + 6n + 8 = (n + 2)(n + 4)$ (chercher les racines de $x^2 + 6x + 8$ et factoriser)
 $a = n(n + 2)(n + 4)$ or $n(n + 4)$ est un entier naturel donc $n + 2$ divise a

$b = 252^{(n)}$ donc $b = 2 + 5n + 2n^2$
 $2 + 5n + 2n^2 = (n + 2)(2n + 1)$ (chercher les racines de $2n^2 + 5n + 2$ et factoriser)
 $b = (n + 2)(2n + 1)$ or $(2n + 1)$ est un entier naturel donc $n + 2$ divise b

2. a. $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 4$ donc $-2\alpha + \beta = 7$ donc d divise 7

2. b. Si 7 divise $n - 3$ alors $n \equiv 3 \pmod{7}$ donc $\begin{cases} \alpha \equiv 2 \times 3 + 1 \pmod{7} \\ \beta \equiv 3 + 4 \pmod{7} \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha \equiv 0 \pmod{7} \\ \beta \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$ donc 7 divise α et 7 divise β

Réciproquement :

Si 7 divise α et β alors 7 divise $\alpha - \beta$ or $\alpha - \beta = n - 3$ donc 7 divise $n - 3$

$7 \text{ divise } n - 3 \Leftrightarrow 7 \text{ divise } \alpha \text{ et } 7 \text{ divise } \beta$

3. $(2n + 1) - 2 \times n = 1$ donc d'après le théorème de Bézout $(2n + 1)$ et n sont premiers entre eux.

4. $\text{PGCD}(a; b) = (n + 2) \text{PGCD}(n(n + 4); 2n + 1)$
 $(2n + 1)$ et n sont premiers entre eux donc $\text{PGCD}(a; b) = (n + 2) \text{PGCD}(n + 4; 2n + 1)$ soit $\text{PGCD}(a; b) = (n + 2)(\alpha \wedge \beta)$

$(\alpha \wedge \beta)$ divise 7 donc soit $(\alpha \wedge \beta) = 1$ soit $(\alpha \wedge \beta) = 7$

si $(\alpha \wedge \beta) = 7$ alors 7 divise α et 7 divise β donc 7 divise $n - 3$ donc $n = 7k + 3$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Sinon 7 ne divise pas $n - 3$ donc 7 ne divise ni α ni β donc $(\alpha \wedge \beta) \neq 7$ donc $(\alpha \wedge \beta) = 1$

d'où les deux cas :

- si $n = 7k + 3$ alors $\text{PGCD}(a; b) = 7(n + 2)$
- si $n \neq 7k + 3$ alors $\text{PGCD}(a; b) = (n + 2)$