Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm).
On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = i,\ z_B = 2\,i \text{ et } z_C = 1$$

On considère la transformation f qui à tout point M du plan d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{2\,i\,z}{z-i}$

On fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z = z'$ (ensemble des points invariants par la transformation f).

2. Déterminer, sous forme algébrique, les affixes des points B' et C', images respectives des points B et C par f.

3. *a.* Montrer que, pour tout point M distinct de A, l'affixe z' de M' vérifie l'égalité : $z' - 2\,i = \dfrac{-2}{z-i}$.

b. En déduire que si le point M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1, alors son image M' appartient à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

c. Exprimer une mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{BM'})$ en fonction d'une mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{AM})$.

On considère le point D d'affixe $z_D = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\,i$. Vérifier que D appartient au cercle Γ.
Construire, à la règle et au compas, le point D et son image D ' par f.

4. On note G l'isobarycentre des points O, B et C.

a. Déterminer l'affixe du point G.

b. On admet que l'image G ' du point G a pour affixe $z_{G'} = -3 - i$.
Le point G' est-il l'isobarycentre des points O, B ' et C ' ?

CORRECTION

1. $z = z' \Leftrightarrow z \neq i \text{ et } z = \dfrac{2\,i\,z}{z-i} \Leftrightarrow z \neq i \text{ et } z(z-i) = 2\,i\,z \Leftrightarrow z \neq i \text{ et } z^2 - i\,z - 2\,i\,z = 0 \Leftrightarrow z \neq i \text{ et } z^2 - 3\,i\,z = 0$

$\Leftrightarrow z \neq i \text{ et } z(z - 3\,i) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 3\,i$. Il existe deux points invariants par f : O et E d'affixe 3 i.

2. B' a pour affixe $b' = \dfrac{2\,i \times 2\,i}{2\,i - i} = \dfrac{2\,i\times 2\,i}{i} = 4\,i$

C' a pour affixe $c' = \dfrac{2\,i\times 1}{1-i} = \dfrac{2\,i\times(1+i)}{(1-i)\times(1+i)} = \dfrac{2(i-1)}{2} = -1+i$

3. *a.* $z' - 2\,i = \dfrac{2\,i\,z}{z-i} - 2\,i \Leftrightarrow z' - 2\,i = \dfrac{2\,i\,z - 2\,i(z-i)}{z-i} \Leftrightarrow z' - 2\,i = \dfrac{2\,i\,z - 2\,i\,z + 2\,i^2}{z-i} \Leftrightarrow z' - 2\,i = \dfrac{-2}{z-i}$

b. $|z' - 2\,i| = \dfrac{2}{|z-i|}$, si le point M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1, alors $|z - i| = 1$ donc $|z' - 2\,i| = 2$
soit $|z' - z_B| = 2$ donc BM' = 2. Le point M' appartient au cercle de centre B et de rayon 2.

c. $(\vec{u},\overrightarrow{BM'}) = \arg(z' - 2\,i)$ or $z' - 2\,i = \dfrac{-2}{z-i}$ donc $(\vec{u},\overrightarrow{BM'}) = \arg\left(\dfrac{-2}{z-i}\right) \Leftrightarrow (\vec{u},\overrightarrow{BM'}) = \arg(-2) - \arg(z-i)$

$\Leftrightarrow (\vec{u},\overrightarrow{BM'}) = \pi - \arg(z - z_A) \Leftrightarrow (\vec{u},\overrightarrow{BM'}) = \pi - (\vec{u},\overrightarrow{AM})$.

Pour vérifier que D appartient au cercle Γ, il suffit de vérifier que AD = 1, $AD = |z_D - i| \Leftrightarrow AD = \left|\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\,i - i\right|$

$\Leftrightarrow AD = \left|\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i\right| \Leftrightarrow AD = \sqrt{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}} \Leftrightarrow AD = 1$

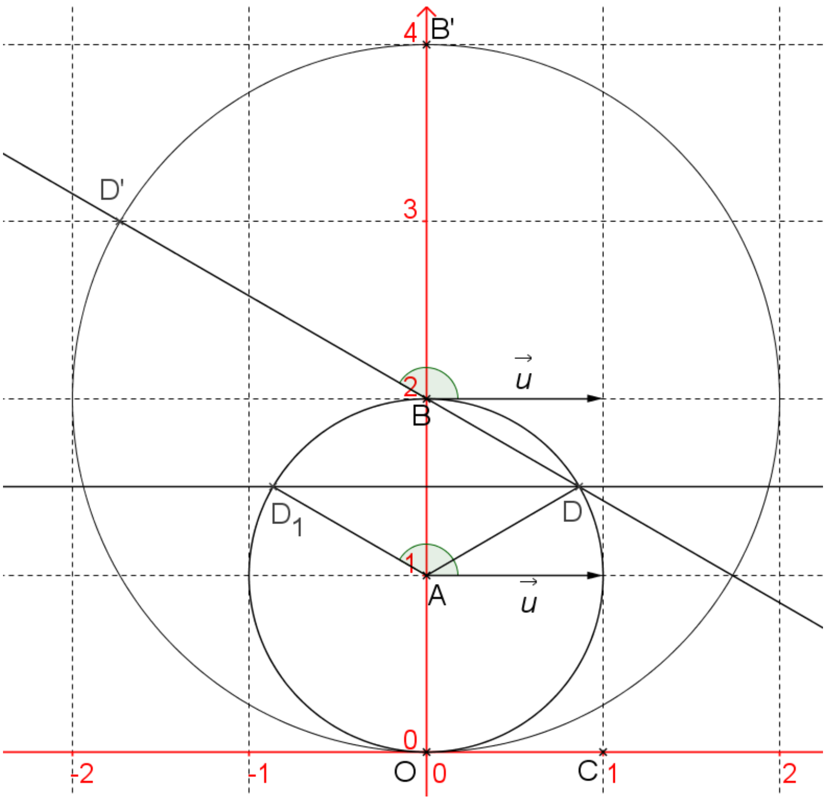
D appartient au cercle de centre A de rayon 1 donc D' appartient au cercle de centre B et de rayon 2 et $(\vec{u},\overrightarrow{BD'}) = \pi - (\vec{u},\overrightarrow{AD})$

or $(\vec{u},\overrightarrow{AD}) = \arg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i\right)$ donc $(\vec{u},\overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{6}$

D est le point d'abscisse positive, intersection du cercle de centre A de rayon 1 et de la droite d'équation $y = 3$ et $(\vec{u},\overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{6}$,

Soit D_1 le symétrique de D par rapport à l'axe des imaginaires, la figure (cercle et droite) étant symétrique par rapport à l'axe des imaginaires, $(\vec{u},\overrightarrow{AD_1}) = \pi - \dfrac{\pi}{6}$

La parallèle en B à la droite (AD_1) coupe le cercle de centre B de rayon 2 en deux points, un seul D' est tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{BD'}) = \pi - \frac{\pi}{6}$ soit $(\vec{u}, \overrightarrow{BD'}) = \frac{5\pi}{6}$.



4. *a.* G a pour affixe $z_G = \frac{1}{3}(z_O + z_B + z_C)$ soit $\frac{1}{3}(1 + 2i)$

b. L'isobarycentre des points O, B ' et C ' a pour affixe $\frac{1}{3}\left(z_O + z_{B'} + z_{C'}\right)$ soit $\frac{1}{3}(-1 + i + 4i)$ donc $\frac{-1}{3} + \frac{5}{3}i$ donc G' n'est pas l'isobarycentre des points O, B ' et C '.