On considère l'équation (E) dans Z^2, $2x^2 - y^2 = 5$.

1. Etant donné un entier x, déterminer les restes possibles de la division euclidienne par 5 des nombres x^2 et $2x^2$.
2. Prouver que l'équation (E) n'admet pas de solution.

CORRECTION

1.

modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
modulo 5, x^2 est congru à	0	1	4	4	1
modulo 5, $2x^2$ est congru à	0	2	3	3	2

Les restes possibles de la division euclidienne par 5 du nombre x^2 sont 0 ; 1 ou 4.

Les restes possibles de la division euclidienne par 5 du nombre $2x^2$ sont 0 ; 2 ou 3.

modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
modulo 5, $2x^2$ est congru à	0	2	3	3	2
modulo 5, $2x^2 + 5$ est congru à	0	2	3	3	2

Les restes possibles de la division euclidienne par 5 du nombre $2x^2 + 5$ sont 0 ; 2 ou 3.
Les restes possibles de la division euclidienne par 5 du nombre y^2 sont 0 ; 1 ou 4.
Si $2x^2 + 5 = y^2$ alors $2x^2 + 5$ et y^2 ont le même reste dans la division par 5. La seule possibilité est donc que ce reste soit nul, donc si l'équation admet une solution, x est congru à 0 modulo 5 et y aussi.
Il existe deux entiers relatifs x' et y' tels que $x' = 5x$ et $y' = 5y$
$2x^2 - y^2 = 5 \Leftrightarrow 2 \times 5^2 x'^2 - 5^2 y'^2 = 5 \Leftrightarrow 5(2x'^2 - y'^2) = 1$
$2x'^2 - y'^2 \in Z$ donc il faudrait que 5 divise 1 ce qui n'est pas possible donc l'équation (E) n'admet pas de solution.