On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x}\sin(x)$, et on note C_f sa courbe représentative.

Pour tout réel x, on pose $g(x) = -e^{-x}$ et $h(x) = e^{-x}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. En déduire la limite en $+\infty$ de $f(x)$ et l'existence d'une asymptote D pour la courbe C_f.

2. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir k
Initialisation	x prend la valeur 1
Traitement	Tant que Abs (exp(– x) × sin(x)) > k
	x prend la valeur x + 1
	FinTantque
Sortie	Afficher x

Appliquer l'algorithme avec $k = 10^{-3}$. Définir le rôle de l'algorithme.

3. Etudier, sur $[0 ; 2\pi]$, la position de la courbe C_f par rapport à l'axe des abscisses.

4. *a.* Déterminer la fonction dérivée de f, et démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \sqrt{2}\, e^{-x}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

b. Etudier le signe de la dérivée et en déduire le tableau de variations de f sur $[0 ; 2\pi]$.

5. On note respectivement C_g et C_h les courbes représentatives des fonctions g et h.

a. Démontrer que, sur $[0 ; 2\pi]$, les courbes C_f et C_g n'ont qu'un seul point commun, puis prouver qu'elles admettent, en ce point, une tangente commune.

b. Démontrer que, sur $[0 ; 2\pi]$, les courbes C_f et C_h n'ont qu'un seul point commun, puis prouver qu'elles admettent, en ce point, une tangente commune.

6. Dans un repère orthogonal, construire les courbes C_g, C_h et C_f.

CORRECTION

1. Pour tout x réel, $-1 \leq \sin x \leq 1$

La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc, en multipliant par e^{-x} les termes de l'inégalité précédente :

pour tout réel x, $-e^{-x} \leq e^{-x}\sin(x) \leq e^{-x}$ soit pour tout réel x, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote en $+\infty$ à C_f.

2.

x	$\lvert e^{-x}\sin(x)\rvert$	
1	0,3096	$\lvert e^{-x}\sin(x)\rvert > 10^{-3}$ l'algorithme continue
2	0,1231	$\lvert e^{-x}\sin(x)\rvert > 10^{-3}$ l'algorithme continue
3	0,0070	$\lvert e^{-x}\sin(x)\rvert > 10^{-3}$ l'algorithme continue
4	0,0139	$\lvert e^{-x}\sin(x)\rvert > 10^{-3}$ l'algorithme continue
5	0,0065	$\lvert e^{-x}\sin(x)\rvert > 10^{-3}$ l'algorithme continue
6	0,0007	$\lvert e^{-x}\sin(x)\rvert \leq 10^{-3}$ l'algorithme s'arrête et affiche 6.

L'algorithme détermine le plus petit entier n tel que $\lvert f(x)\rvert \leq 10^{-3}$.

3. La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc $f(x)$ a le même signe que $\sin x$.

x	0		π		2π
$\sin x$	0	+	0	–	0

La courbe coupe l'axe des abscisses en 0, π et 2π.

Sur $[0 ; \pi]$, C_f est au dessus de l'axe des abscisses,

Sur $[\pi ; 2\pi]$, C_f est en dessous de l'axe des abscisses,

4. *a.* $\begin{cases} u(x) = e^{-x} & u'(x) = -e^{-x} \\ v(x) = \sin x & v'(x) = \cos x \end{cases}$ donc $f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$ donc $f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$.

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ donc $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4}$

$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$

$\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ donc $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$

Pour tout réel x, $f'(x) = \sqrt{2}\, e^{-x}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

b. La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc $f'(x)$ a le même signe que $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Quand $x \in [0 ; 2\pi]$, $x + \frac{\pi}{4}$ appartient à $\left[\frac{\pi}{4} ; 2\pi + \frac{\pi}{4}\right]$ donc

si $\frac{\pi}{4} \le x + \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \ge 0 \Leftrightarrow$ si $0 \le x \le \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$, $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow$ si $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $f'(x) \ge 0$

si $\frac{\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{2}$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \le 0 \Leftrightarrow$ si $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$, $f'(x) \le 0 \Leftrightarrow$ si $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}$, $f'(x) \le 0$

si $\frac{3\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{4} \le 2\pi + \frac{\pi}{4}$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \ge 0 \Leftrightarrow$ si $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \le x \le 2\pi$, $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow$ si $\frac{5\pi}{4} \le x \le 2\pi$, $f'(x) \ge 0$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
f	0	↗	$e^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	$-e^{-\frac{5\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	0

5. a. Les points d'intersection, s'ils existent des courbes C_f et C_g ont des abscisses solutions de $-e^{-x} = e^{-x}\sin x$

La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc $\sin x = -1$ donc sur $[0 ; 2\pi]$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

Sur $[0 ; 2\pi]$, les courbes C_f et C_g n'ont qu'un seul point commun **A**$\left(\frac{3\pi}{2} ; -e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)$.

En ce point, la tangente à C_g a pour coefficient directeur $g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{-\frac{3\pi}{2}}$ et la tangente à C_f a pour coefficient directeur $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$ or $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$ donc $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}$

Les deux courbes C_f et C_g passent par A et les tangentes en A ont le même coefficient directeur donc elles admettent, en ce point, une tangente commune.

b. Les points d'intersection, s'ils existent des courbes C_f et C_h ont des abscisses solutions de $e^{-x} = e^{-x}\sin x$

La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc $\sin x = 1$ donc sur $[0 ; 2\pi]$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Sur $[0 ; 2\pi]$, les courbes C_f et C_h n'ont qu'un seul point commun B$\left(\frac{\pi}{2} ; e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$.

En ce point, la tangente à C_h a pour coefficient directeur $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$ et la tangente à C_f a pour coefficient directeur $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$ or $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ donc $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$

Les deux courbes passent par B et les tangentes en B ont le même coefficient directeur donc elles admettent, en ce point, une tangente commune.