EXERCICE 1 : (6 points) Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1) Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\,e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2) On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E').

3) Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').

4) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

5) Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble IR des nombres réels par $f_k(x) = (x + k)\,e^{-x}$ où k est un nombre réel donné.

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1) Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x_k = 1 - k$

2) On note M_k le point de la courbe C_k d'abscisse $1 - k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.

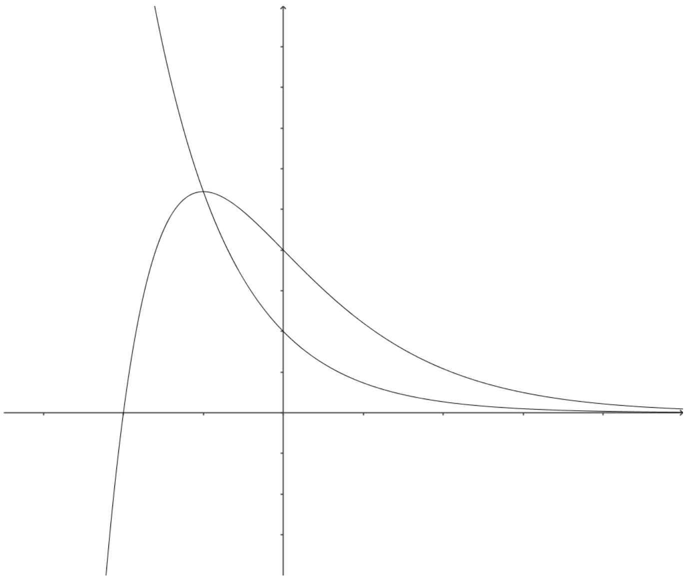
3) Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes

- la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$,
- la courbe C_k d'équation $y = (x + k)\,e^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.

a) Identifier les courbes et les nommer.

b) En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.

4) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^2 (x+2)\,e^{-x}\,dx$. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.



EXERCICE 2 : (5 points) Commun à tous les candidats

1) **Restitution organisée de connaissances.**

Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.

Propriété 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors, pour tout entier naturel n, $v_n \geq u_n$.

Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge , toute suite décroissante et minorée converge.

Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

2) Dans les cas suivants, les suites (u_n) et (v_n) ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ? Justifier les réponses.

a) $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$;

b) $u_n = \ln(n + 1)$ et $v_n = \ln(n + 1) + \dfrac{1}{n}$

c) $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

3) On considère un nombre réel a positif et les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entier naturel n non nul par :

$$u_n = 1 - \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln\left(a + \frac{1}{n}\right).$$

Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes ?

EXERCICE 3 : (4 points) Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

1) Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher: 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à :

- $\frac{21}{40}$
- $\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{1}{3}$
- $\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{1}{3}$

2) De la même urne, on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs avec remise. La probabilité d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égale à :

- $\frac{3^3\times 7^2}{10^5}$
- $\binom{5}{2}\times\left(\frac{3}{10}\right)^2\times\left(\frac{7}{10}\right)^3$
- $\binom{5}{2}\times\left(\frac{3}{10}\right)^3\times\left(\frac{7}{10}\right)^2$

3) De la même urne, on tire une seule boule. Si elle est blanche, on lance un dé cubique (dont les faces sont numérotées de 1 à 6). Si la boule est noire, on lance un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). On suppose les dés bien équilibrés. Le joueur gagne s'il obtient le numéro 1. Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est égale à :

- $\frac{7}{60}$
- $\frac{14}{23}$
- $\dfrac{\frac{7}{10}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}$

4) On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un nombre réel strictement positif). La probabilité de l'événement $[\, 1 \leq X \leq 3 \,]$ est égale à :

- $e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$
- $e^{-3\lambda} - e^{-\lambda}$
- $\frac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}}$

EXERCICE 4 : (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle c de centre O passant par A.

Dans tout l'exercice on note α le nombre complexe $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe α.

1) *a*) Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.

b) Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle c.

2) Soit D un point du cercle c d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

a) Construire sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point E image du point D par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) Justifier que le point E a pour affixe $z_E = \alpha e^{i\theta}$.

3) Soient F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].

a) Justifier que le point F a pour affixe $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

b) On admet que le point G a pour affixe $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$.

Démontrer que $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$. On pourra utiliser la question 1) *a*).

En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

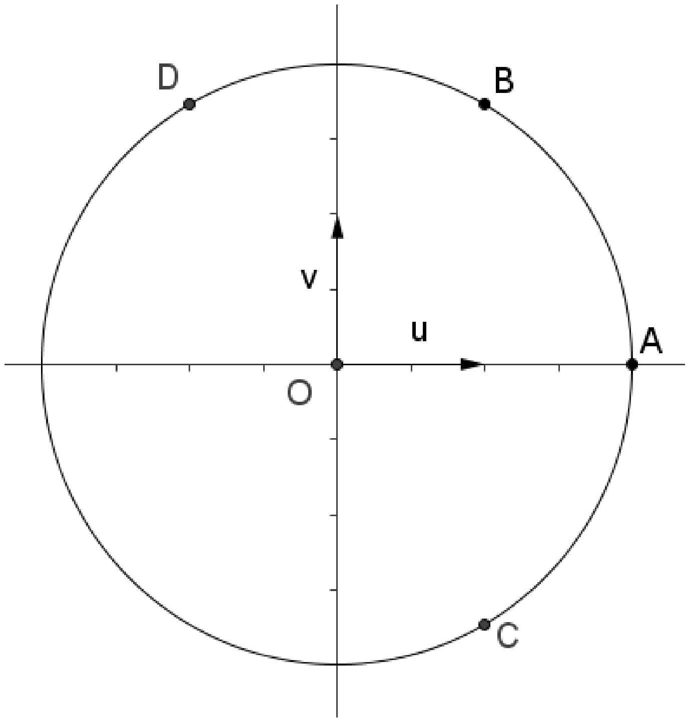
4) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture qu'il existe une position du point D, défini à la question 2, pour laquelle la longueur du coté AF du triangle AFG est minimale.

On admet que $AF^2 = 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ par $f(x) = 4 - 3\cos x + \sqrt{3}\sin x$. Le tableau ci-dessous donne les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$. Compléter ce tableau de variation. Permet-il de valider la conjecture ? Justifier.

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{5\pi}{6}$		π
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	



EXERCICE 4 : (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans tout l'exercice, $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique : 4 cm).

On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$.

1) On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point d'affixe $-\overline{z} + 2$.

a) Déterminer les images respectives par la transformation T du point A et du point Ω d'affixe $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.

c) Déterminer l'image par la transformation T du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

2) $\mathscr{C}'$ désigne le cercle de centre O' d'affixe 2 et de rayon 1.

a) Construire le point A' appartenant au cercle $\mathscr{C}'$ tel que : $\left(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{O'A'}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ [modulo 2π].

b) À tout point M du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe z, on associe le point M' du cercle $\mathscr{C}'$ d'affixe z' tel que $\left(\overrightarrow{OM},\ \overrightarrow{O'M'}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ [modulo 2π].

Déterminer le module et un argument de $\dfrac{z'-2}{z}$. En déduire que $z' = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}z + 2$.

c) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}z + 2$.

3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

À tout point M du plan, on associe le point M_1 milieu du segment [MM']. Quel est le lieu géométrique du point M_1 lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$?

CORRECTION

EXERCICE 1 : (6 points) Commun à tous les candidats

Partie A

1) $u'(x) = \mathrm{e}^{-x} + x(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x} - u(x)$ donc $u'(x) + u(x) = \mathrm{e}^{-x}$

La fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2) Les solutions de (E') sont les fonctions de la forme $x \to C\,\mathrm{e}^{-x}$ où C est une constante réelle.

3) $v - u$ solution de (E') $\Leftrightarrow (v-u)' + (v-u) = 0$

$\Leftrightarrow v' - u' + v - u = 0 \Leftrightarrow v' + v = u' + u$ or pour tout x réel, $u'(x) + u(x) = \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow$ pour tout x réel, $v'(x) + v(x) = \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow v$ solution de (E)

4) v solution de (E) $\Leftrightarrow v - u$ solution de (E') $\Leftrightarrow v - u$ de la forme $C\,\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow$ pour tout x réel, $v(x) = C\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x}$ où C est une constante réelle.

5) g solution de l'équation différentielle (E) $\Leftrightarrow$ il existe un constante réelle C telle que pour tout x réel, $g(x) = C\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x}$ or $g(0) = 2$ donc C = 2 donc pour tout x réel, $g(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$

Partie B

1) $f_k'(x) = \mathrm{e}^{-x} + (x+k)(-\mathrm{e}^{-x}) = (1-k-x)\,\mathrm{e}^{-x}$

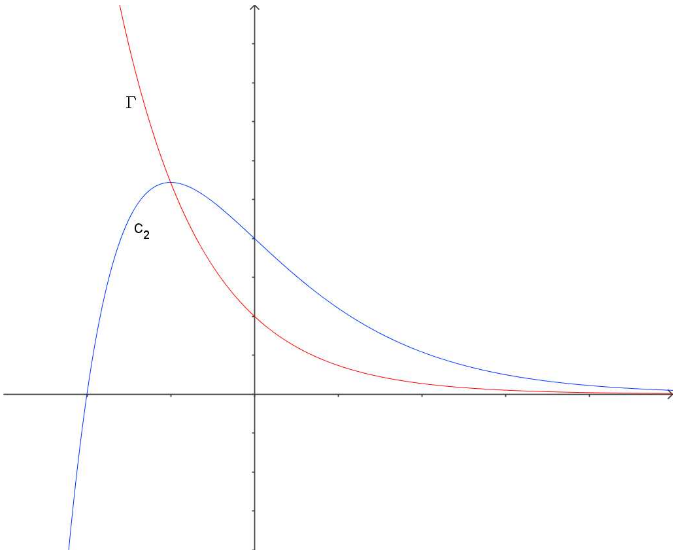
La fonction exponentielle est positive sur R donc $f_k'(x)$ a le même signe que $1 - k - x$

Si $x \geq 1 - k$, alors $1 - k - x \leq 0$ donc f_k est décroissante sur $[1-k\,;+\infty[$

Si $x \leq 1 - k$, alors $1 - k - x \geq 0$ donc f_k est décroissante sur $[1-k\,;+\infty[$

la fonction f_k admet un maximum en $x_k = 1 - k$.

2) $f_k(1-k) = (1-k+k)\,\mathrm{e}^{1-k} = \mathrm{e}^{1-k}$ donc si M_k est le point de la courbe C_k d'abscisse $1-k$, M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$.



3) *a*) La courbe Γ est représentative d'une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$, une seule des deux courbes convient.

b) La courbe C_k tracée coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse – 2 donc $k = 2$

La courbe Γ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 donc l'axe des ordonnées est gradué de 0,5 en 0,5.

4) Soit $u'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ donc $u(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

$v(x) = x + 2$ donc $v'(x) = 1$

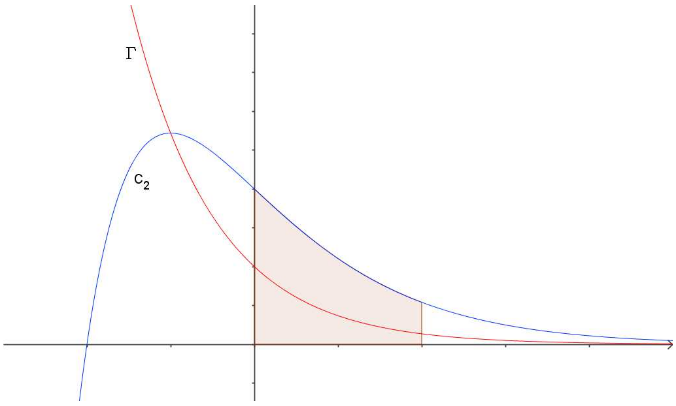
donc $\int_0^2 (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-(x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

$\int_0^2 (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -4\,\mathrm{e}^{-2} + 2 - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2$

$\int_0^2 (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -4\,\mathrm{e}^{-2} + 2 - (\mathrm{e}^{-2} - 1)$

donc $\int_0^2 (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 3 - 5\,\mathrm{e}^{-2}$

La fonction g est continue positive sur $[0\,;\,2]$ donc $\int_0^2 (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe C_2, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.



EXERCICE 2 : (5 points) Commun à tous les candidats

1) Soient deux suites adjacentes (u_n) et (v_n), avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante

(u_n) est croissante donc pour tout entier n, $u_n \geq u_0$

pour tout entier naturel n, $v_n \geq u_n$ donc $v_n \geq u_n \geq u_0$ donc (v_n) est une suite décroissante minorée par u_0 donc (v_n) converge vers un réel ℓ.

(v_n) est décroissante donc pour tout entier n, $v_n \leq v_0$

pour tout entier naturel n, $v_n \geq u_n$ donc $v_0 \geq v_n \geq u_n$ donc (u_n) est une suite croissante majorée par v_0 donc (u_n) converge vers un réel ℓ'.

(u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$ soit $\ell - \ell' = 0$, donc si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

2) *a*) si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ et la suite (q^n) est décroissante

$10^{-n} = \left(\frac{1}{10}\right)^n$ or $-1 < \frac{1}{10} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 10^{-n} = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

La suite $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ est décroissante donc la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.

(u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} 1\text{n}\,(n+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Les suites (u_n) et (v_n) n'ont pas de limite finie donc ne sont pas adjacentes.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$

$v_1 = 0$; $v_2 = \frac{3}{2}$ et $v_3 = \frac{2}{3}$ donc la suite (v_n) n'est ni croissante ni décroissante. Les suites (u_n) et (v_n) ne sont pas adjacentes.

3) La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante donc la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ln a$

pour que les suites soient adjacentes, il faut que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$ donc que $\ln a = 1$ soit $a = \mathrm{e}$

Si $a = \mathrm{e}$, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

EXERCICE 3 : (4 points) Commun à tous les candidats

1) On tire simultanément 3 boules parmi 10 dans de l'urne. Le nombre de cas possibles est $\binom{10}{3}$ = 120

On choisit 2 boules blanches parmi 7 et 1 boule noire parmi 3

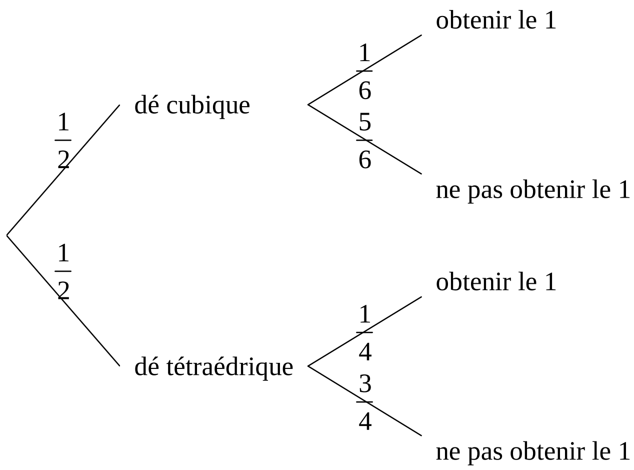
Le nombre de cas favorables est $\binom{7}{2}\times\binom{3}{1}$ = 21 × 3

la probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à : $\dfrac{21\times 3}{120} = \dfrac{21}{40}$

2) On a une succession de 5 tirages identiques et indépendants, chacun *a* deux issues : la boule est blanche $\dfrac{7}{10}$ ou la boule n'est pas blanche $\dfrac{3}{10}$, donc la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches suit une loi binomiale de paramètres 5 ; $\dfrac{7}{10}$

La probabilité d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égale à $\binom{5}{2}\times\left(\dfrac{3}{10}\right)^3\times\left(\dfrac{7}{10}\right)^2$

3)



La probabilité d'obtenir le 1 est $p(\text{G}) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}$

La probabilité d'obtenir une boule blanche et de gagner est $p(\text{B}\cap\text{G}) = \dfrac{7}{10}\times\dfrac{1}{6}$ donc $p_{\text{G}}(\text{B}) = \dfrac{p(\text{B}\cap\text{G})}{p(\text{G})} = \dfrac{\dfrac{7}{10}\times\dfrac{1}{6}}{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}}$

4) $p(\text{X} \le t) = 1 - \text{e}^{-\lambda t}$ donc $p\,[1 \le \text{X} \le 3\,] = p(\text{X} \le 3) - p(\text{X} \le 1) = 1 - \text{e}^{-3\lambda} - (1 - \text{e}^{-\lambda}) = \text{e}^{-\lambda} - \text{e}^{-3\lambda}$

EXERCICE 4 : (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1) *a*) $\alpha - 2 = -1 + i\sqrt{3}$ donc $(\alpha - 2)^2 = 1 - 3 - 2i\sqrt{3}$ soit $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = -2 - 2i\sqrt{3}$

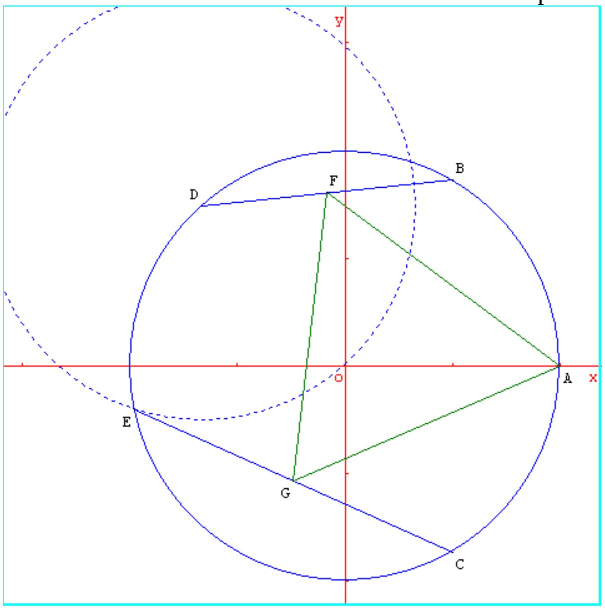
$\alpha^2 - 4\alpha = -6 - 2i\sqrt{3}$ or $2\overline{\alpha} - 8 = 2(1 - i\sqrt{3}) - 8 = -6 - 2i\sqrt{3}$ donc $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.

b) $\alpha - 2 = -1 + i\sqrt{3}$ donc $|\alpha - 2| = 2$ donc OB = OA

de même $\overline{\alpha} - 2 = -1 - i\sqrt{3}$ donc $|\overline{\alpha} - 2| = 2$ donc OC = OA

Les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

2) *a*) Il suffit de tracer un triangle équilatéral direct donc de tracer le cercle de centre D passant par O



b) $z_E = e^{i\frac{\pi}{3}} z_D = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\,e^{i\theta} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\theta}$ donc $z_E = \alpha\,e^{i\theta}$.

3) *a*) $z_F = \dfrac{z_B + z_D}{2} = \dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

b) $z_G = \dfrac{\alpha\,e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$ donc $z_G - 2 = \dfrac{\alpha\,e^{i\theta} + \overline{\alpha} - 4}{2}$ or $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$ donc $\overline{\alpha} - 4 = \dfrac{\alpha^2 - 4\alpha}{2}$

donc $z_G = \dfrac{\alpha\,e^{i\theta} + \dfrac{\alpha^2 - 4\alpha}{2}}{2} = \dfrac{2\alpha\,e^{i\theta} + \alpha^2 - 4\alpha}{4} = \dfrac{1}{4}\alpha(2\,e^{i\theta} + \alpha - 4)$

$z_F - 2 = \dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta} - 2 = \dfrac{1}{2}(\alpha + 2\,e^{i\theta} - 4)$ donc $\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2} = \dfrac{\frac{1}{4}\alpha(2\,e^{i\theta} + \alpha - 4)}{\frac{1}{2}(2\,e^{i\theta} + \alpha - 4)} = \dfrac{\alpha}{2}$

$\dfrac{\alpha}{2} = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc $\dfrac{\alpha}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $\left|\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

donc AG = AF et $(\overrightarrow{AF}\,;\overrightarrow{AG}) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ donc le triangle AFG est équilatéral.

4) $f(-\pi) = 7$; $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = 4 - 2\sqrt{3}$; $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 4 + 2\sqrt{3}$; $f(\pi) = 7$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
f	7	↘	$4 - 2\sqrt{3}$	↗	$4 + 2\sqrt{3}$	↘	7

f admet un minimum absolu en $-\dfrac{\pi}{6}$, pour la position de D correspondante (D d'affixe $2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$, la longueur AF sera minimale et égale à $4 - 2\sqrt{3}$.

EXERCICE 4 : (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) *a)* $z_{A'} = -1 + 2 = 1$ donc T(A) = A

$z_{\Omega'} = -(1 - i\sqrt{3}) + 2 = 1 + i\sqrt{3}$ donc T(Ω) = Ω

b) T a une écriture complexe de la forme $z' = a\,\overline{z} + b$ donc est une similitude indirecte de rapport $|a| = 1$ donc est une réflexion. T admet deux points invariants A et Ω donc T est une réflexion d'axe (AΩ).

c) La réflexion T transforme le cercle de centre O de rayon 1 en le cercle de centre T(O) de même rayon .
T(O) est le point d'affixe 2 donc T transforme le cercle $\mathscr{C}$ en le cercle de centre O'(2) de rayon 1.

2) *a)* Soit D le point d'affixe 3, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'D}$ soit le cercle de centre D de rayon O'D, ce cercle coupe $\mathscr{C}'$ en deux points, l'un des deux A' est tel que le triangle O'DA' soit équilatéral direct donc tel que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A'}\right) = \frac{\pi}{3}$ [modulo 2 π].

b) À tout point M du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe z, on associe le point M' du cercle $\mathscr{C}'$ d'affixe z' tel que $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}\right) = \frac{\pi}{3}$ [modulo 2 π].

M' appartient à $\mathscr{C}'$ donc $|z' - 2| = 1$

M appartient à $\mathscr{C}$ donc $|z| = 1$ donc $\left|\frac{z'-2}{z}\right| = 1$

$\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}\right) = \frac{\pi}{3}$ [modulo 2 π] donc arg $\frac{z'-2}{z} = \frac{\pi}{3}$ [modulo 2 π].

donc $\frac{z'-2}{z} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2$.

c) r a pour écriture complexe $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2$ de la forme $a\,z + b$ avec $|a| = 1$ donc r est une rotation d'angle arg(a) soit d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$z' = z \Leftrightarrow z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 2 \Leftrightarrow 2\,z = (1 + i\sqrt{3})\,z + 4 \Leftrightarrow z\,(1 - i\sqrt{3}) = 4 \Leftrightarrow z\,(1 - i\sqrt{3})\,(1 + i\sqrt{3}) = 4\,(1 + i\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow 4\,z = 4\,(1 + i\sqrt{3}) \Leftrightarrow z = 1 + i\sqrt{3}$ donc r est la rotation de centre Ω d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3) M_1 a pour affixe $\frac{z + z'}{2}$ soit $z_1 = \frac{\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) z + 1$ soit $z_1 - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) z$

M appartient à $\mathscr{C}$ donc OM = 1 soit $|z| = 1$ donc $|z_1 - 1| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ soit $AM_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

le lieu géométrique du point M_1 lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ est le cercle de centre A de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$.