Soit n un entier naturel non nul.

On définit la suite (I_n) par $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx$.

1° Démontrer que I_n est bien défini et positif pour tout entier naturel n non nul.

2° Calculer I_1

3° Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$.

4° Calculer I_2 et I_3.

5° En déduire l'intégrale $K = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x) e^{-x}\, dx$

CORRECTION

1. La fonction $x \to x^n e^{-x}$ est continue (produit de fonctions continues) et positive sur [0 ; 1] donc I_n est bien défini et positif pour tout entier naturel n non nul.

2° Soit $v(x) = x$ $v'(x) = 1$

$u'(x) = e^{-x}$ $u(x) = -e^{-x}$

$$I_1 = \int_0^1 x e^{-x}\, dx = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}\, dx$$

$$I_1 = -e^{-1} - \left[e^{-x} \right]_0^1 = -e^{-1} - (e^{-1} - 1) = 1 - 2e^{-1}.$$

$$I_1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

3° Soit $v(x) = x^{n+1}$ $v'(x) = (n+1)x^n$

$u'(x) = e^{-x}$ $u(x) = -e^{-x}$

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x}\, dx = \left[-x^{n+1} e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)\, x^n e^{-x}\, dx$$

$I_{n+1} = -e^{-1} + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx$ soit pour tout entier naturel n non nul, $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$.

4° pour tout entier naturel n non nul, $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$ donc si $n = 1$, la relation devient :

$$I_2 = -\frac{1}{e} + (1+1) I_1 = -\frac{1}{e} + 2\left(1 - \frac{2}{e}\right) = 2 - \frac{5}{e}$$

si $n = 2$, la relation devient : $I_3 = -\frac{1}{e} + (2+1) I_2 = -\frac{1}{e} + 3\left(2 - \frac{5}{e}\right) = 6 - \frac{16}{e}$

5° $K = -\int_0^1 x^3 e^{-x}\, dx + 2\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx - \int_0^1 x e^{-x}\, dx = -I_3 + 2 I_2 - I_1$

$$K = -6 + \frac{16}{e} + 4 - \frac{10}{e} - 1 + \frac{2}{e}$$

$$K = \frac{8}{e} - 3$$