On considère la suite ($\mathrm{I}_n$) définie pour $n$ entier naturel non nul par : $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n\, \mathrm{e}^{x^2}\, \mathrm{d}x$.

**1. *a.*** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$.

Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$, est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g$.

***b.*** En déduire la valeur de $\mathrm{I}_1$.

***c.*** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier $n$, supérieur ou égal à 1, on a : $\mathrm{I}_{n+2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}\mathrm{I}_n$

***c.*** **La question 1. *c.* n'est plus au programme, on peut la remplacer par :**

Dériver la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^{n+1}\,\mathrm{e}^{x^2}$.

En déduire une expression de $\int_0^1 h'(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de $\mathrm{I}_{n+2}$ et $\mathrm{I}_n$.

Démontrer que, pour tout entier $n$, supérieur ou égal à 1, on a : $\mathrm{I}_{n+2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}\mathrm{I}_n$

***d.*** Calculer $\mathrm{I}_3$ et $\mathrm{I}_5$.

**2.** On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Initialisation | Affecter à $n$ la valeur 1 |
| | Affecter à $u$ la valeur $\frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}$ |
| Traitement | Tant que $n < 21$ |
| | Affecter à $u$ la valeur |
| | Affecter à $n$ la valeur $n + 2$ |
| Sortie | Afficher $u$ |

Quel terme de la suite ($\mathrm{I}_n$) obtient-on en sortie de cet algorithme ?

**3. *a.*** Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, $\mathrm{I}_n \geq 0$.

***b.*** Montrer que la suite ($\mathrm{I}_n$) est décroissante.

***c.*** En déduire que la suite ($\mathrm{I}_n$) est convergente. On note $\ell$ sa limite,

**4.** *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la valeur de $\ell$.

## CORRECTION

**1. *a.*** Si $u$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, la dérivée de $\mathrm{e}^u$ est $u'\,\mathrm{e}^u$ donc $\mathrm{G}'(x) = \frac{1}{2}\times 2\,x \times \mathrm{e}^{x^2} = g(x)$ donc la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g$.

***b.*** $\mathrm{I}_1 = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{G}(1) - \mathrm{G}(0) = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}$

***c.*** $\mathrm{I}_{n+2} = \int_0^1 x^{n+1}\times x\,\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n+1}\times g(x)\,\mathrm{d}x$

Soit $\begin{cases} u'(x) = g(x) & u(x) = \mathrm{G}(x) \\ v(x) = x^{n+1} & v'(x) = (n+1)\,x^n \end{cases}$ alors : $\mathrm{I}_{n+2} = \left[\, x^{n+1}\,\mathrm{G}(x)\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)\,x^n\times \mathrm{G}(x)\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{I}_{n+2} = \left[\, x^{n+1}\,\mathrm{G}(x)\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)\,x^n\times \mathrm{G}(x)\,\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{I}_{n+2} = \mathrm{G}(1) - \int_0^1 \frac{1}{2}(n+1)\,x^n\times x\,g(x)\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{I}_{n+2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}(n+1)\int_0^1 x^{n+1} g(x)\,\mathrm{d}x$ soit $\mathrm{I}_{n+2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}\mathrm{I}_n$

***c.*** **question modifiée**

$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{x^2} & u'(x) = 2\,x\,\mathrm{e}^{x^2} \\ v(x) = x^{n+1} & v'(x) = (n+1)\,x^n \end{cases}$ donc $h'(x) = 2\,x\times x^{n+1}\,\mathrm{e}^{x^2} + (n+1)\,x^n\,\mathrm{e}^{x^2}$.

$h'(x) = 2\,x^{n+2}\,\mathrm{e}^{x^2} + (n+1)\,x^n\,\mathrm{e}^{x^2}$.

$\int_0^1 h'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2\,x^{n+2}\,\mathrm{e}^{x^2} + (n+1)\,x^n\,\mathrm{e}^{x^2}\right)\mathrm{d}x$ donc $\int_0^1 h'(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^{n+2}\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x + (n+1)\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

$\int_0^1 h'(x)\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{I}_{n+2} + (n+1)\,\mathrm{I}_n$

$\int_0^1 h'(x)\,\mathrm{d}x = h(1) - h(0) = \mathrm{e}$ donc pour tout entier $n$, supérieur ou égal à 1, on a : $2\,\mathrm{I}_{n+2} + (n+1)\,\mathrm{I}_n = \mathrm{e}$

donc $2\,\mathrm{I}_{n+2} = \mathrm{e} - (n+1)\,\mathrm{I}_n$ donc $\mathrm{I}_{n+2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}\mathrm{I}_n$

***d.*** Si $n = 1$, l'égalité précédente devient : $\mathrm{I}_3 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1+1}{2}\mathrm{I}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \left(\frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}\right)$ donc $\mathrm{I}_3 = \frac{1}{2}$.

Si $n = 3$, l'égalité précédente devient : $\mathrm{I}_5 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{3+1}{2}\mathrm{I}_3 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - 2 \times \frac{1}{2}$ donc $\mathrm{I}_5 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - 1$.

**2.** L'algorithme calcule à l'aide de la relation $\mathrm{I}_{n+2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}\mathrm{I}_n$, pour les valeurs impaires de $n$.

La dernière étape est pour $n$=19, $u$ prend la valeur $\frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{19+1}{2}u$, et $n$ prend la valeur 19 + 2 donc 21

$n = 21$ donc l'algorithme s'arrête et affiche $\mathrm{I}_{21}$.

**3. *a.*** Pour tout entier naturel non nul $n$, la fonction $x \to x^n\,\mathrm{e}^{x^2}$ est continue (produit de fonctions continues) positive sur $\mathbb{R}$, et $1 > 0$ donc, pour tout entier naturel non nul $n$, $\mathrm{I}_n \geq 0$.

***b.*** $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$

$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^1 \left(x^{n+1}\,\mathrm{e}^{x^2} - x^n\,\mathrm{e}^{x^2}\right)\mathrm{d}x$

$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n\,(x-1)\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

Pour tout entier naturel non nul $n$, la fonction $x \to x^n\,(x-1)\,\mathrm{e}^{x^2}$ est continue négative sur $\mathbb{R}$, et $1 > 0$ donc, pour tout entier naturel non nul $n$, $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n \leq 0$, la suite $(\mathrm{I}_n)$ est décroissante.

***c.*** La suite $(\mathrm{I}_n)$ est décroissante, minorée par 0 donc est convergente. Soit $\ell$ sa limite.

**4.** Sur [0 ; 1], $0 \leq x^2 \leq 1$ donc $1 \leq \mathrm{e}^{x^2} \leq \mathrm{e}$ donc $0 \leq x^n\,\mathrm{e}^{x^2} \leq \mathrm{e}\,x^n$.
Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$ donc

$0 \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}\,\mathrm{d}x$ soit $0 \leq \mathrm{I}_n \leq \mathrm{e}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$ donc $0 \leq \mathrm{I}_n \leq \mathrm{e}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$ donc $0 \leq \mathrm{I}_n \leq \mathrm{e} \times \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{I}_n = 0$