Une espèce d'oiseaux ne vit que sur deux îles A et B d'un archipel.
Au début de l'année 1013, 20 millions d'oiseaux de cette espèce pressante sur l'île A et 10 millions sur l'île B.
des observations sur plusieurs années ont permis aux ornithologues d'estimer que, compte tenu des naissances, décès, immigration entre les deux îles, on retrouve au début de chaque année les proportions suivantes.
Sur l'île A : 80 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 30 % nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente ;
Sur l'île B : 20 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 70 % nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente.
pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) le nombre d'oiseaux (en millions) présents sur l'île A (respectivement B) au début de l'année (2013 + n).

Partie A algorithmique et conjectures

On donne ci-contre un algorithme qui doit afficher le nombre d'oiseaux vivant sur chacune des deux îles, pour chaque année comprise entre 2013 et une année choisie par l'utilisateur.

```
Début de l'algorithme
Lire n
Affecter à a la valeur 20
Affecter à b la valeur 10
Affecter à i la valeur 2013
Afficher i
Afficher a
Afficher b
Tant que i < n faire
    Affecter à c la valeur (0,8 a + 0,3 b)
    Affecter à b la valeur (0,2 a + 0,7 b)
    Affecter à a la valeur c
Fin du Tant que
Fin de l'algorithme
```

1. Cet algorithme comporte des oublis dans le traitement. Repérer ces oublis et les corriger.
2. On donne ci-dessous une copie d'écran des résultats obtenus après avoir corrigé l'algorithme précédent dans un logiciel d'algorithmique, l'utilisateur ayant choisi l'année 2020.

```
***Algorithme lancé***
En l'année 2013, a prend la valeur 20 et b prend la valeur 10
En l'année 2014, a prend la valeur 19 et b prend la valeur 11
En l'année 2015, a prend la valeur 18,5 et b prend la valeur 11,5
En l'année 2016, a prend la valeur 18,25 et b prend la valeur 11,75
En l'année 2017, a prend la valeur 18,125 et b prend la valeur 11,875
En l'année 2018, a prend la valeur 18,0625 et b prend la valeur 11,9375
En l'année 2019, a prend la valeur 18,03125 et b prend la valeur 11,96875
En l'année 2020, a prend la valeur 18,015625 et b prend la valeur 11,984375
***Algorithme terminé***
```

Au vu de ces résultats, émettre des conjectures concernant le sens de variation et la convergence des suite (a_n) et (b_n).

Partie B Partie mathématique

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M\,U_n$, où M est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on déterminera.

On admet que $U_n = M^n\,U_0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, justifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,6+0,4\times 0,5^n & 0,6-0,6\times 0,5^n \\ 0,4-0,4\times 0,5^n & 0,4+0,6\times 0,5^n \end{pmatrix}$$

On ne détaillera le calcul que pour le premier des coefficients de la matrice M^n.

3. Exprimer a_n en fonction de n, pour tout entier naturel $n \geq 1$.
4. Avec ce modèle, peut-on dire qu'au bout d'un certain nombre d'années, le nombre d'oiseaux sur l'île A va se stabiliser ? Si oui, préciser vers quelle valeur.

CORRECTION

Partie A algorithmique et conjectures

1. L'algorithme doit afficher le nombre d'oiseaux vivant sur chacune des deux îles, pour chaque année

```
Début de l'algorithme
Lire n
Affecter à a la valeur 20
Affecter à b la valeur 10
Affecter à i la valeur 2013
Afficher i
Afficher a
Afficher b
Tant que i < n faire
    Affecter à c la valeur (0,8 a + 0,3 b)
    Affecter à b la valeur (0,2 a + 0,7 b)
    Affecter à a la valeur c
    Afficher i (affiche l'année)
    Afficher a (affiche le nombre d'oiseaux sur l'île A cette année là)
    Afficher b (affiche le nombre d'oiseaux sur l'île B cette année là)
Fin du Tant que
Fin de l'algorithme
```

2. Au vu de ces résultats : la suite (a_n) est décroissante et converge vers 18 ; la suite (b_n) est croissante et converge vers 12.

Partie B Partie mathématique

1. $a_{n+1} = 0{,}8\, a_n + 0{,}3\, b_n$ et $b_{n+1} = 0{,}2\, a_n + 0{,}7\, b_n$ donc si $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ alors pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M\, U_n$.

2. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$M^n = \begin{pmatrix} 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}5^n & 0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}5^n \\ 0{,}4 - 0{,}4 \times 0{,}5^n & 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$$

Initialisation : si $n = 1$, $\begin{pmatrix} 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}5^1 & 0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}5^1 \\ 0{,}4 - 0{,}4 \times 0{,}5^1 & 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}5^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \mathrm{M}^1$, la propriété est vérifiée pour $n = 1$.

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, si $M^n = \begin{pmatrix} 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}5^n & 0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}5^n \\ 0{,}4 - 0{,}4 \times 0{,}5^n & 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$ alors $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}5^{n+1} & 0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}5^{n+1} \\ 0{,}4 - 0{,}4 \times 0{,}5^{n+1} & 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}5^{n+1} \end{pmatrix}$

$\mathrm{M}^{n+1} = \mathrm{M}^n \times \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}5^n & 0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}5^n \\ 0{,}4 - 0{,}4 \times 0{,}5^n & 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}5^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

le premier coefficient de M^{n+1} est égal à

$a_{11} = 0{,}8\,(0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}5^n) + 0{,}2 \times (0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}5^n) = 0{,}48 + 0{,}32 \times 0{,}5^n + 0{,}12 \times 0{,}5^n$

$a_{11} = (0{,}48 + 0{,}12) + (0{,}32 - 0{,}12) \times 0{,}5^n \Leftrightarrow a_{11} = 0{,}6 + 0{,}20 \times 0{,}5^n$ or $0{,}20 = 0{,}5 \times 0{,}4 \Leftrightarrow a_{11} = 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}5 \times 0{,}5^n$

$a_{11} = 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}5^{n+1}$.

Les calculs sont analogues pour les trois autres termes.

La propriété est héréditaire donc pour tout entier $n \geq 1$, $M^n = \begin{pmatrix} 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}5^n & 0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}5^n \\ 0{,}4 - 0{,}4 \times 0{,}5^n & 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$

3. $\mathrm{U}_n = \mathrm{M}^n\, \mathrm{U}_0$ donc $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}5^n & 0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}5^n \\ 0{,}4 - 0{,}4 \times 0{,}5^n & 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}5^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

$a_n = 20 \times (0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}5^n) + 10 \times (0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}5^n)$

$a_n = 18 + 8 \times 0{,}5^n - 6 \times 0{,}5^n$

$a_n = 18 + 2 \times 0{,}5^n$.

4. $-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 18$.

Avec ce modèle, au bout d'un certain nombre d'années, le nombre d'oiseaux sur l'île A va se stabiliser à 18 millions d'oiseaux.