Soit C la courbe représentative de la fonction exponentielle,
Soit a un réel quelconque, M_a le point de la courbe C d'abscisse a et N_a le projeté orthogonal de M_a sur l'axe des abscisses.
Soit T_a la tangente en M_a à la courbe C. Elle coupe l'axe des abscisses en un point S_a.

A. Sous-tangente constante:

1. Sur un logiciel de géométrie, construire la figure puis émettre une conjecture sur $S_a N_a$.

2. *a.* Ecrire l'équation de T_a.

b. Montrer que la droite T_a coupe l'axe des abscisses et déterminer l'abscisse de S_a.

3. Sur une feuille, placer dans un repère le point de C d'abscisse – 0,5 puis construire la tangente $T_{-0,5}$. Faire de même pour le point de C d'abscisse 1.

B. Etude de la réciproque:

Soit f une fonction définie, dérivable et strictement positive sur R telle que $f(0) = 1$ et dont la dérivée f' est strictement positive.
Soit C la courbe représentative de f. Soit a un réel quelconque, M_a le point de C d'abscisse a et N_a le projeté orthogonal de M_a sur l'axe des abscisses.
Soit T_a la tangente en M_a à la courbe C. T_a coupe l'axe des abscisses en S_a. La sous-tangente $N_a S_a$ est constante égale à 1.

1. Déterminer les coordonnées de N_a et S_a en fonction de a.

2. Montrer que la seule fonction solution est la fonction exponentielle.

CORRECTION

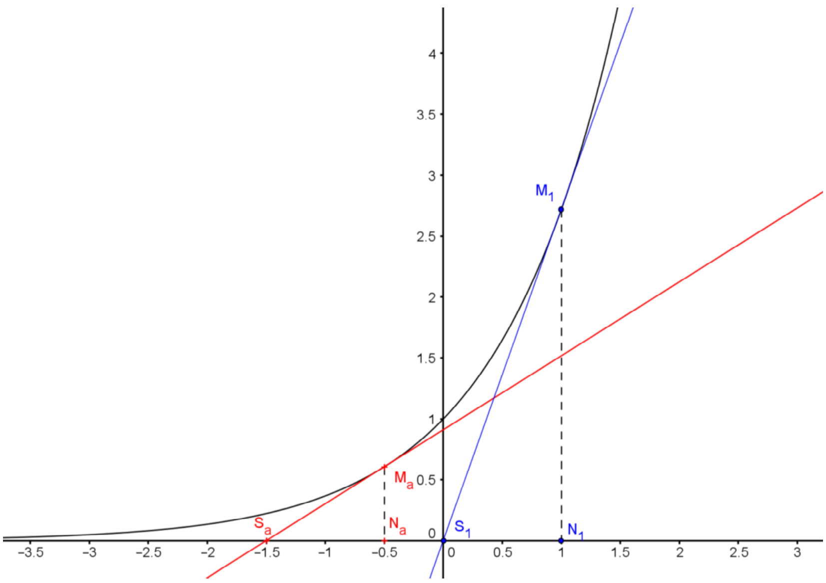
A. Sous-tangente constante:

1. On peut conjecturer que $S_a N_a = 1$.

2. *a.* Une équation de T_a est $y = e^a(x - a) + e^a$ soit $y = e^a(x - a + 1)$.

b. Le coefficient directeur de la droite T_a est e^a or une exponentielle est toujours strictement positive donc ne s'annule pas donc droite T_a coupe l'axe des abscisses. L'abscisse de S_a est solution de $y = e^a(x - a + 1) = 0$ soit $x = a - 1$.

3.



La tangente $(T_{-0,5})$ passe par M et coupe l'axe des abscisses en $S_{-0,5}$ d'abscisse $a - 1$ soit $-0,5 - 1$ donc $-1,5$.
Pour construire $(T_{-0,5})$, il suffit de placer le point $N_{-0,5}$ de coordonnées $(-0,5\,;\,0)$, puis le point $M_{-0,5}$ de la courbe de même abscisse, le point $S_{-0,5}$ de coordonnées $(-1,5\,;\,0)$, la tangente est la droite $(M_{-0,5} N_{-0,5})$.
De même pour construire la tangente (T_1).

B. Etude de la réciproque:

1. M_a a pour coordonnées $(a\,;\,f(a))$, N_a a pour coordonnées $(a\,;\,0)$.
T_a la tangente en M_a à la courbe C a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
Cette droite coupe l'axe des abscisses en S_a tel que $f'(a)(x - a) + f(a) = 0$

La dérivée f' est strictement positive donc $x - a = -\dfrac{f(a)}{f'(a)}$ donc $x = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$. S_a a pour coordonnées $\left(a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}\,;0\right)$.

2. $x_N - x_S = a - \left(a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}\right) = \dfrac{f(a)}{f'(a)}$

Les fonctions f et f' sont strictement positive donc la sous-tangente $N_a S_a$ est constante égale à 1 donc $\dfrac{f(a)}{f'(a)} = 1$.

Pour tout réel a, $f(a) = f'(a)$ donc pour tout x réel, $f(x) = k\,e^x$.
$f(0) = 1$ donc $k = 1$ donc la seule fonction solution est la fonction exponentielle.