

$$\begin{cases} 221x - 331y = 1 \\ 221 \times 3 - 331 \times 2 = 1 \end{cases} \text{ donc par différence membre à membre : } 221(x - 3) - 331(y - 2) = 0$$

$$221(x - 3) = 331(y - 2)$$

$x - 3$ est un entier relatif donc 221 divise $331(y - 2)$

221 et 331 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 221 divise $y - 2$,

Il existe donc un entier relatif k tel que $y - 2 = 221k$

En remplaçant dans $221(x - 3) = 331(y - 2)$, on obtient que $x - 3 = 331k$ donc $x = 331k + 3$ et $y = 221k + 2$

Vérification :

$$221(331k + 3) - 331(221k + 2) = 221 \times 331k + 221 \times 3 - 331 \times 221k - 2 \times 331$$

$$221(331k + 3) - 331(221k + 2) = 221 \times 3 - 331 \times 2 = 1$$

Les solutions de l'équation (E) $221x - 331y = 1$ sont les couples $(331k + 3 ; 221k + 2)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. a. (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 331 donc $v_n = 331n + 3$

b. $u_p = v_q \Leftrightarrow 2 + 221p = 3 + 331q \Leftrightarrow 221p - 331q = 1 \Leftrightarrow (p ; q)$ est solution de (E) donc, $p = 331k + 3$ et $q = 221k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$0 \leq p \leq 500 \text{ donc } 0 \leq 331k + 3 \leq 500 \Leftrightarrow -3 \leq 331k \leq 497 \Leftrightarrow -\frac{3}{331} \leq k \leq \frac{497}{331}$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ donc } k \in \{0 ; 1\}$$

Pour $k = 0$, $p = 3$ et $q = 2$ donc $0 \leq p \leq 500$ et $0 \leq q \leq 500$.

Pour $k = 1$, $p = 334$ et $q = 223$ donc $0 \leq p \leq 500$ et $0 \leq q \leq 500$.

Les deux conditions $0 \leq p \leq 500$ et $0 \leq q \leq 500$ sont vérifiées donc soit $k = 0$ soit $k = 1$

k	$p = 331k + 3$	$q = 221k + 2$	$u_p = 221p + 2$	$v_q = 331q + 3$
0	3	2	665	665
1	334	223	73816	73816

Il existe deux couple d'entiers naturels $(p ; q)$, le couple $(3 ; 2)$ et $(334 ; 223)$ tels que $u_p = v_q$, $0 \leq p \leq 500$ et $0 \leq q \leq 500$.