Corrigé des travaux dirigés (2015)

Corrigé 1

$\dot{x} = -2\omega x$; $\ddot{x} = 4\omega^2 x$; $\dot{y} = -2\frac{b\omega}{c}z$; $\ddot{y} = -4\omega^2 y$; $\dot{z} = 2\frac{c\omega}{b}y$; $\ddot{z} = -4\omega^2 z$

A t=0 : $x_0 = d$; $y_0 = b$; $z_0 = 0$ et $\dot{x}_0 = -2\omega d$; $\dot{y}_0 = 0$; $\dot{z}_0 = 2c\omega$;
$v = 2\omega\sqrt{c^2 + d^2}$; $a = 4\omega^2\sqrt{d^2 + b^2}$

$$cos\theta = \frac{\dot{x}_0}{v} = -\sqrt{\frac{1}{1 + (\frac{c}{d})^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Corrigé 2

1. $T = \left(27 + \frac{1}{3}\right).24.3600 = 2361600\ s.$
2. Le mouvement est circulaire uniforme, $a_t = 0$; $a_n = \omega^2 R$;
   Loi de l'attraction et de Newton : $M_L\omega^2 R = G\frac{M_L M_T}{R^2}$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $R^3 = G\frac{M_T}{\omega^2}$; $R = 382\ 065\ km$
   La valeur admise réellement est distance Terre-Lune = 384 400 km

Corrigé 3

Formules de départ :

$$\dot{\vec{u}}_{x_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x_1} ; \dot{\vec{u}}_{y_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y_1} ; \dot{\vec{u}}_{z_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{z_1}$$

$$\vec{V}(M/\Re) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_1} + x_1\dot{\vec{u}}_{x_1} + y_1\dot{\vec{u}}_{y_1} + z_1\dot{\vec{u}}_{z_1} + \dot{x}_1\vec{u}_{x_1} + \dot{y}_1\vec{u}_{y_1} + \dot{z}_1\vec{u}_{z_1} \ : \quad x_1\dot{\vec{u}}_{x_1} + y_1\dot{\vec{u}}_{y_1} + z_1\dot{\vec{u}}_{z_1} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

On dérive une seconde fois en utilisant les mêmes formules, on obtient :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \qquad \vec{a}_e = \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OO1} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}) \qquad \vec{a}_C = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

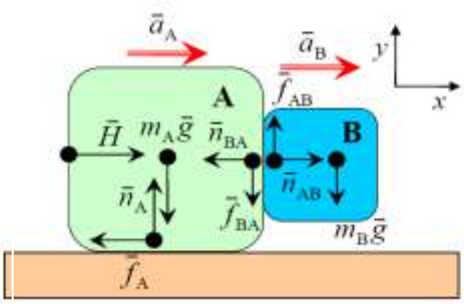
$$\vec{a}_r = \ddot{x}_1\vec{u}_{x_1} + \ddot{y}\vec{u}_{y_1} + \ddot{z}\vec{u}_{z_1}$$

Cas particuliers : Entrainement en translation pure (sans rotation) : $\vec{a}_e = \frac{d^2}{dt^2}(\overrightarrow{OO_1})$; $\vec{a}_c = 0$

Entrainement en rotation uniforme, mouvement plan avec $\omega = Cste$; O=O$_1$ $\vec{a}_e = \omega^2\overrightarrow{OM}$; $\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$
Conséquences : forces d'inertie d'entrainement opposée à l'accélération dans un repère en translation rectiligne accéléré ; forces d'inertie centrifuge et force d'inertie complémentaire dans un repère en rotation uniforme.(Voir cours)

Corrigé 4

Les forces mises en jeu sont représentées sur la figure :
Les poids, les actions et réactions entre A et B et entre A et le plancher.



On écrit la 2ème loi de Newton pour chaque corps :
Pour A : $\vec{H} + m_A\vec{g} + \vec{R}_A + \vec{R}_{BA} = m_A\vec{a}_A$
Pour B : $m_B\vec{g} + \vec{R}_{AB} = m_B\vec{a}_B$
On projette sur les axes horizontal et vertical, on tient compte de la 3ème loi de Newton $\vec{R}_{BA} = \vec{R}_{AB}$, que les deux corps restent en contact dans un mouvement horizontal $\vec{a}_A = \vec{a}_B = a\vec{u}_x$ et du frottement $f_A = \mu_A n_A$; $f_{AB} = \mu_B n_{AB}$
On trouve : $a = \frac{g}{\mu_B}$; $H = (m_A + m_B)g(\frac{1}{\mu_B} + \mu_A)$ = 180,3 N

Corrigé 5

On calcule les composantes de l'accélération puis : $\vec{F} = -m\omega^2(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})$. Il est clair que cette force dérive de l'énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$.

Travail entre 1 et 2 = diminution de E_p : $W_1^2 = E_p^1 - E_p^2 = \frac{1}{2}\ m\omega^2(r_1^2 - r_2^2)$

Énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 sin^2\omega t + b^2 cos^2\omega t) = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + b^2 - r^2)$

D'où $E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + b^2) = \ Cste = C$.

Ce qui est normal d'après le théorème de l'énergie cinétique : $E_{c2} - E_{c1} = W = E_{p1} - E_{p2}$
Répartition égale de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle pour

$$E_c = E_p = \frac{C}{2} = \frac{1}{4} m\omega^2 r^2 \rightarrow r = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Corrigé 6

Système : enfant. Référentiel : terrestre galiléen.

Au début : l'énergie mécanique totale de l'enfant $E_0 = E_p = mgh$ (il se prépare à sauter de la hauteur h)

Lorsque le trampoline est comprimé au maximum

$$E = E_p + E_c = -mgd + \frac{1}{2}kd^2$$

En écrivant la conservation de l'énergie totale $E = E_0$(système isolé), on trouve une équation du second degré en d, on ne garde que la solution positive : $d = 0{,}56\ m$.

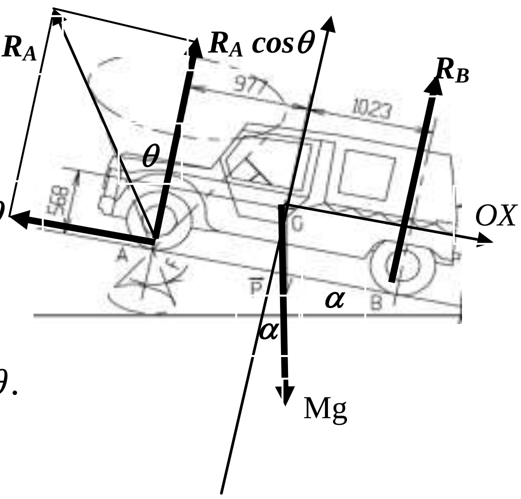
L'enfant se laisse pousser par le ressort qui se détend jusqu'à l'altitude maximale h' où sa vitesse est nulle.

La conservation de l'énergie donne : $mgh = mgh' \rightarrow h' = h = 1\ m$.

L'énergie fournie par l'enfant est :

$E_e = mg(h'' - h) = 400$ J. (Énergie apportée par un paquet de cacahuètes !)

Corrigé 7



On écrit que la résultante des forces appliquées au système (voiture) est nulle, puis que le moment des forces en G est nul. Tout le poids est centré en G. La roue B n'est pas freinée : la réaction de la route sur la voiture en B, soit R_B est perpendiculaire à la route. Ce qui donne :

Résultante des forces sur OXY (en tenant compte des 4 roues) :

$$Mg\cos\alpha = 2R_A\cos\theta + 2R_B\ ;\ Mg\sin\alpha = 2R_A\sin\theta\ ;\ tg\alpha = 0{,}2$$

Résultante du moment en G

$$R_B d_B = R_A(d_A\cos\theta + D\sin\theta)$$

où D est le diamètre de la roue = 568. Coefficient de frottement $\mu = tg\theta$.

On élimine R_A et R_B on trouve :

$$\mu = \frac{(d_A + d_B)tg\alpha}{d_B - D\,tg\alpha} = 0.44$$

Corrigé 8

$$g(r) = G\frac{M_T}{r^2} = g_0\frac{R^2}{r^2}\ ;V(r) = \omega r = \frac{2\pi}{T}r\ ;P = mg(r) = m\omega^2 r \rightarrow T = 2\pi\frac{r}{R}\sqrt{\frac{r}{g_0}}$$

Ce qui donne : $v^2 = \frac{GM_T}{r} = \frac{g_0R^2}{r}$ et $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg_0\frac{R^2}{r}$; $E_p = -mg_0\frac{R^2}{r} = -2\,E_c$; $E_m = \frac{1}{2}E_p = -E_c$

Pour l'orbite géostationnaire, la période du satellite est égale à la période de rotation propre de la terre (le satellite observe toujours le même endroit sur terre) : T = 23,93419 heures = 86163,084 s. Avec $g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$.

On trouve : *h=35 784 km ;* hauteur par rapport à la surface de la terre. Vitesse : *v = 3047 m/s=10 969 km/h*

Corrigé 9

Le mercure monte, donc la pression dans le gaz est supérieure à la pression atmosphérique.

$h = 47 - 15 = 32\ cm = 0{,}32\ m.\ et\ P_g = P_{atm} + \rho_{Hg}gh$=143,65. 10^3 Pa

$$n = \frac{PV}{RT}\ ;V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 5{,}24.10^{-4}m^3\ et\ donc\ n = 0{,}0307\ mole$$

Corrigé 10

1. Le volume ajouté en une heure est
$$V = \pi R^2 h = 100{,}48\ m^3\ d'où\ Q_v = \frac{100{,}48}{3600} = 0{,}0279\ m^3s^{-1} = 27{,}9\ l.s^{-1}$$
2. En 1 s le volume vidé est : $1{,}2.\frac{\pi\,(0{,}03)^2}{4}$=$8{,}48.10^{-4}$ m^3/s =0,84 *l/s*
3. On écrit la conservation de la masse : débits entrants=débits sortants, ce qui donne : D_4=-20 cm^3/s entrant.

Corrigé 11

$P_B = P_A + \rho h' g = P_C + \rho_{Hg}(h' - h)g\ ;P_C = P_D + \rho_{eau}\,gh\ ;\ P_A = P_D$; ce qui donne : ρ = *8560*

Corrigé 12

Le liquide est incompressible : donc le volume du liquide déplacé à gauche est égal au volume du liquide déplacé à droite : $\pi R^2 H = \pi r^2 h$. Ce qui donne <u>*h = 4,5 cm*</u>. On applique ensuite que la Loi Fondamentale de l'Hydrostatique (LFH) entre les points B et A du fluide :
$P_B = P_C = P_A + \rho g(H+h)$ Mais le liquide supporte en B la pression de l'atmosphère et la pression due au poids de la masse M : $P_B = P_0 + \frac{Mg}{S}$; $S = \pi R^2$ La surface en A est à l'air libre donc : $P_A = P_0$.
De ces équations, on tire : $M = \pi R^2 \rho(H+h) = 1{,}13\ kg$

Corrigé 13

1) On applique la LFH entre Q et M (vitesses négligeables) : $P_M = P_Q + \rho g h_0 = 102\ kPa$. Le théorème de Bernoulli entre M et N : $\frac{1}{2}\rho V_M^2 + \rho g Z_M + P_M = \frac{1}{2}\rho V_N^2 + \rho g Z_N + P_N$ avec
$Z_N = 0;\ V_M = 0;\ Z_M = h;\ P_N = P_0$ Ce qui donne : $V_N = \sqrt{2g(h+h_0)} = 4{,}64\ m.s^{-1}$
2) $Q_v = sV_N = \sqrt{2g(h+h_0)}$
3) Appliquons le théorème de Bernoulli entre M et N avec l'aiguille placée en N dans la veine du malade : $\frac{1}{2}\rho V_M^2 + \rho g Z_M + P_M = \frac{1}{2}\rho V'^2_N + \rho g Z_N + P'_N$ avec $Z_N = 0;\ V_M = 0;\ Z_M = h;\ P'_N = \frac{3}{4}P_0$ Ce qui donne : $V'_N = \sqrt{\frac{P_0}{2\rho} + 2g(h+h_0)} = 8{,}5\ m.s^{-1}$. Le volume du liquide perfusé : $v = Q_v.t = s'.V'_N.3600 = 15{,}2\ l.$
Ce volume est trop grand car on n »a pas tenu compte de la viscosité qui ralentit la vitesse donc diminue le volume.
4) Ici, on applique la formule de Poiseuille qui tient compte de la viscosité :
$$Q'_v = \frac{\pi R^4}{8\mu h}(P_M - P'_N) = \frac{s'^2}{8\pi\mu h}\left(\frac{P_0}{4} + \rho g h_0\right)$$
Application numérique : $v' = Q'_v.t = 0{,}23\ l.$ C'est proche du volume perfusé normalement : ¼ litre.

Corrigé 14

1) Le ballon se soulève, la force appliquée est donc : $\vec{F} = \vec{A} - \vec{P}$; où $\vec{A}$ est la poussée d'Archimède et $\vec{P}$ le poids. $\vec{A} = -\rho_{air}(T_s)V_{ballon}\,\vec{g}$; $\vec{P} = M\vec{g}$, T_s est la température au sol (20°C)
Au sol : on calcule $\rho_{air}(T_s)$ à partir de l'équation des gaz parfaits avec l'approximation $P(T_s)=P_0$. On trouve : $\rho_{air}(T_s) = \rho_{air}(T_0)\frac{T_0}{T_s}$ d'où F = 800 N
2) Appliquons la loi des gaz parfaits pour l'hélium qui remplit le ballon :
Au sol : $P(0)V(0) = nRT_s$, à la hauteur z : $P(z)V(z) = nRT(z)$ d'où : $\frac{V(z)}{V(0)} = \frac{T(z)}{P(z)}\frac{P(0)}{T_s}$. Comme T et P diminuent, on ne peut pas conclure sur la variation de V avec z.
3) On porte les formules *P(z)* et *T(z)* dans les équations ci-dessus, on obtient : $V(z) = \frac{V(0)}{T_s}(T_s - az)e^{kz}$
Pour z = *2 km, V(z) = 175,7 m*^{3}.
4) Pour z = *10 km : V = 324,2 m*^{3} > V_{max}, le ballon éclate à cette altitude. Pour la force ascensionnelle : $F = \rho_{air}(z)V(z)g - Mg$ avec $\rho(z) = \rho(0)\frac{T_s}{T-az}e^{-kz}$ donc : $\rho_{air}(z)V(z) = V(0)\rho(0)$ La force est donc indépendante de z. C'est normal puisque l'air et l'hélium varient de la même manière (gaz parfaits) en fonction de l'altitude.

Corrigé 15

La masse volumique varie avec la pression, on utilise donc la LFH sous forme différentielle : $dP + \rho g dz$=0
On remplace ρ et on intègre :
$$\frac{dP}{1 + a(P - P_0)} = -\rho_0 g dz \to Ln[(1 + a(P - P_0)] = -a\rho_0 g z \to P = P_0 + \frac{1}{a}(e^{-a\rho_0 g z} - 1)\,; z < 0$$
Pour de faibles profondeurs, on utilise la formule approchée : $e^x \simeq 1 + x$ pour $x \simeq 0$ ce qui donne : $P \simeq P_0 - \rho_0 g z$. Pour *z = -1 km*, $P_{approchée}$ = *99,1.10*^{5} *Pa*. Pression exacte à partir de la formule : *P=99,15.10*^{5} *Pa*. Erreur relative commise : $\varepsilon = \frac{99{,}15 - 99{,}1}{99{,}15} = 5.10^{-4}$

Corrigé 16

1. Masse totale de la plateforme : $M = 350 + 3.\frac{\pi(0{,}5)^2}{4}.4.700 \sim 2000\ kg$
2. Volume immergé (dans l'eau) V_{im} : On écrit que la plateforme est en équilibre sous l'action du poids et de la poussée d'Archimède :

Poussée A = poids du liquide déplacé, $A = \rho_{mer} V_{im} g$ = Poids = Mg

Ce qui donne :

$$V_{im} = \frac{M}{\rho_{mer}} = 1{,}95\ m^3 \rightarrow \text{fraction du volume immergé des poutres}$$

$$f = \frac{V_{im}}{V(3\ poutres)} = \frac{1{,}95}{3.\pi(0{,}5)^2} = 0{,}82 = 82{,}8\%$$

3. Force maximale que peut supporter la plateforme : On écrit que le volume immergé est égal au volume total, soit $A = \rho_{mer} V_{total}\, g$; $F = (\rho_{mer} - \rho_{bois})V_{total}\, g = \frac{\rho_{mer} - \rho_{bois}}{\rho_{bois}} Mg = \left(\frac{\rho_{mer}}{\rho_{bois}} - 1\right) Mg$=9109 N

Corrigé 17

On applique l'équation de Bernoulli entre les 2 surfaces de l'eau qui sont à la pression atmosphérique et on néglige la vitesse d'écoulement à la partie supérieure

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g H = P_0 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \rightarrow V_2^2 - V_1^2 = 2gH$$

Équation de continuité : $V_1S_1 = V_2S_2$, ce qui donne :

$$V_2^2\left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right) = 2gH. Avec\ S_2 = \frac{\pi d^2}{4} = 7{,}8.10^{-3}\ m^2 << S_1 \rightarrow V_2 = \sqrt{2gH} = 7{,}67\ m.s^{-1}$$

D'où le débit volumique $Q_v = s.V_2 = \frac{\pi d^2}{4} V_2 = 0{,}6\ l.s^{-1}$. Le volume total est $V = 3\ m^3 = 3000\ l$.

La durée de vidange est donc : $t = \frac{3000}{0{,}6} = 5000\ s = 1h\ 23\ \text{min}\ 20\ s$.

Corrigé 18

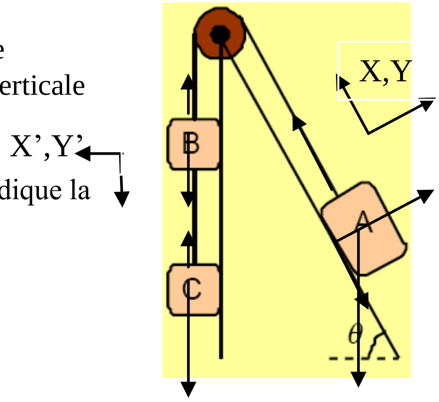
Équation de Bernoulli entre l'entrée et la sortie (z constant) :

$$P_{atm} + \frac{F}{S_1} + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho V_2^2\ ; S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$$

Équation de continuité : $V_1S_1 = V_2S_2$ et le débit $Q_v = V_2S_2$. On trouve $V_2 = 10\ m/s$ et $Q_v = 0{,}785\ l.s^{-1}$

Exercice 19

Figure ci-contre : La corde de masse négligeable passe sur la poulie sans frottement. Le frottement est μ sur le plan incliné et nul sur le plan vertical. Calculer l'accélération verticale en supposant que les corps descendent sur le plan vertical



Corrigé 19

1. Les corps descendent. La force de frottement est opposée au mouvement comme l'indique la figure. On isole chaque corps et on écrit la 2ème loi de Newton :

Corps A : $\vec{P}_A + \vec{N}_A + \vec{f}_A + \vec{T}_A = m_A\vec{a}_A$

Corps B : $\vec{P}_B + \vec{T}_B + \vec{T}_{CB} = m_B\vec{a}_B$

Corps C : $\vec{P}_C + \vec{T}_{BC} = m_C\vec{a}_C$

On tient compte de la définition du coefficient de frottement $\mu = \frac{f_A}{N_A}$ et que les corps se déplacent ensemble : $|\vec{a}_A| = |\vec{a}_B| = |\vec{a}_C| = a$. On écrit que la tension se transmet par la corde : $|T_A| = |T_B|$ et la 3ème loi de Newton : $\vec{T}_{BC} = -\vec{T}_{CB}$

Choix des repères pour les projections : XY pour le corps A et X'Y' pour les corps B et C.

On trouve

$$a = g\frac{m_B + m_C - m_A(sin\theta + \mu cos\theta)}{m_A + m_B + m_C}$$

Exercice 20

De l'eau tombe d'une cascade. Elle a une vitesse de 2m/s au sommet (altitude 505 m) et une vitesse de 12 m/s en bas (altitude 484 m). Calculer la fraction de l'énergie potentielle perdue par l'eau. On prendra g) 10 m/s2

Corrigé 20

On applique le théorème de l'énergie cinétique pour la masse inconnue de l'eau, soit m.

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}M(12^2 - 2^2) = 70M$$

La diminution d'énergie potentielle mesurée est : $\Delta E_p = Mg(505 - 484) = 21Mg = 210M$ au lieu de 70 m

La fraction d'énergie potentielle perdue est donc : (210-70)/210=0,667=66,7%