Pondichéry Avril 2004

Exercice 1 (3 points)
1.

Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases}$

a. Calculer u_1, , u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.

b. Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur N par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

c. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

2. Soit v la suite de terme général v_n défini par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

a. Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.
b. Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par : $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$. Exprimer S_n en fonction de n.
Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (4 points)
Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Il y a trois boules noires dans l'urne U_1, deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, toutes autres boules contenues dans les urnes sont blanches.
Les blanches sont indiscernables au toucher.
Une partie se déroule de la façon suivante ;
le joueur lance le dé,

- s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1 ;
- s'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2 ;
- si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.

On désigne par A, B, C et N les événements suivants :
A : " le dé amène le numéro 1"
B : " le dé amène un multiple de trois "
C : " le dé amène un numéro qui n'est ni le 1 ni un multiple de trois "
N : " la boule tirée est noire "

1. Le joueur joue une partie :

a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\dfrac{5}{3k}$.

b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

c. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\dfrac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\dfrac{1}{30}$.

Le joueur joue 20 parties, indépendantes les une des autres.
Calculer sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

Exercice 3 (8 points)

Partie A. Etude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)\,e^{-x} - 1$.

1. *a.* Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Etudier le sens de variation de φ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$, qui sera notée α.
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

Partie B . Etude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

Sur une feuille annexe, page 5, sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions f et g. Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x + 1)\,e^{-x}$ et $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ sont notées C_f et C_g.

1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées (0, 1) et admettent en ce point la même tangente.

2. *a.* Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1)\,\varphi(x)}{x^2+x+1}$

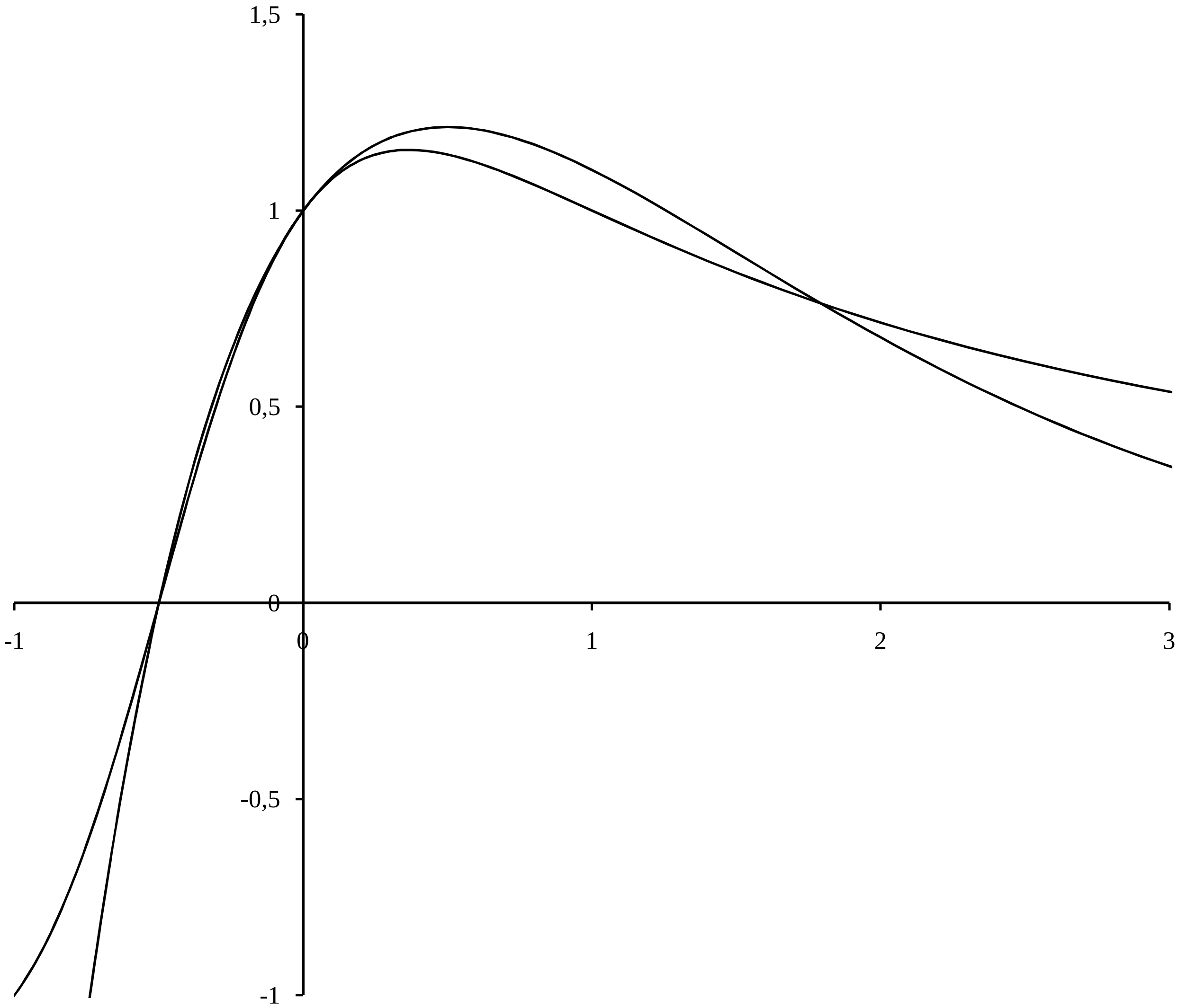
où φ est la fonction étudiée dans la partie A.

b. A l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire la position relative des courbes C_f et C_g.

3. *a.* Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (-2x - 3)\,e^{-x} - \ln(x^2 + x + 1)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \to f(x) - g(x)$.

b. En déduire l'aire A, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les deux courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = 0$. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-4} de cette aire.



Exercice 4 (5 points) obligatoire

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

Les solutions seront notées z' et z'', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive, Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. Donner la valeur exacte de $(z')^{2004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

1. Montrer que les points A d'affixe $1 + i\sqrt{3}$ et B d'affixe $1 - i\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon. Tracer ce cercle puis construire les points A et B.

2. On note O' l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et B' l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Calculer les affixes des points O' et B' et construire ces points.

3. Soit I le milieu du segment [OB].

a. Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle AO'B' ?

b. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$. Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{O'B'}$ est égale à $3\sqrt{3} - i$.

c. La conjecture émise à la question 3. *a*. est-elle vraie ?

Exercice 4 (5 points) spécialité

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A(0 ; 5 ; 5) et B(0 ; 0 ; 10).

1. Dans cette question, on se place dans le plan P_0 d'équation $x = 0$ rapporté au repère $(O ; \vec{j}, \vec{k})$. On note C le cercle de centre B passant par A.

Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle C.

2. On nomme S la sphère engendrée par la rotation du cercle C autour de l'axe (O*z*) et Γ le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (O*z*).

a. Démontrer que le cône Γ admet pour équation : $x^2 + y^2 = z^2$.

b. Déterminer l'intersection du cône Γ et de la sphère S.

Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.

c. Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.

3. On coupe le cône Γ par le plan P, d'équation $x = 1$.

Dans P_1 l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection. Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.

4. Soit M (x, y, z) un point du cône Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls. Démontrer que x et y ne peuvent pas être simultanément impairs.

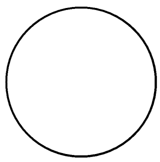


Figure 1

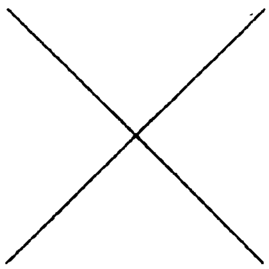


Figure 2

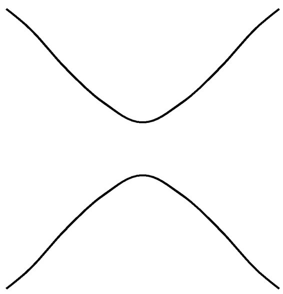


Figure 3

CORRECTION

Exercice 1 (3 points)

1. *a.* $u_1 = \dfrac{1}{2 - u_0} = \dfrac{1}{2}$ $u_2 = \dfrac{1}{2 - u_1} = \dfrac{2}{3}$ $u_3 = \dfrac{1}{2 - u_2} = \dfrac{3}{4}$

b. $u_0 = w_0$, $u_1 = w_1$, $u_2 = w_2$, $u_3 = w_3$.

c. Pour $n = 0$; $u_0 = w_0$,

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si au rang n tel que $u_n = w_n$, et alors $u_{n+1} = w_{n+1}$.

$u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$ or $u_n = w_n$ et $2 - w_n = 2 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$ donc $2 - w_n = \dfrac{(n+1)+1}{n+1} = \dfrac{1}{w_{n+1}}$

donc $u_{n+1} = w_{n+1}$.

La propriété est vraie au rang $n + 1$ donc vraie pour tout n de $\mathbb{N}$

2. *a.* $v_1 + v_2 + v_3 = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$ donc $v_1 + v_2 + v_3 = \ln\left(\dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4}\right)$

$v_1 + v_2 + v_3 = \ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$ donc $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

b. $S_n = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ldots + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ donc $S_n = \ln\left(\dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \ldots \times \dfrac{n}{n+1}\right)$

$S_n = \ln\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ donc $S_n = -\ln(n + 1)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (n + 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\infty$

Exercice 2 (4 points)

1. *a*. L'événement N se décompose en 3 événements disjoints :

"le joueur a obtenu le numéro 1 et la boule tirée de l'urne 1 est noire" événement $N \cap A$

"le joueur a obtenu un multiple de trois et la boule tirée de l'urne 2 est noire" événement $N \cap B$

"le joueur a obtenu un numéro qui n'est ni le 1 ni un multiple de 3 et la boule tirée de l'urne 3 est noire" événement $N \cap B$

donc $p(N) = p(N \cap A) + p\,(N \cap B) + p\,(N \cap C)$

$p(N \cap A) = p\,(N / A) \times p(A)$ or $p(A) = \frac{1}{6}$

N / A correspond à l'événement "choisir une boule noire dans l'urne 1"

L'urne 1 contient k boules et 3 boules noires donc $p(N / A) = \frac{3}{k}$ donc $p(N \cap A) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{k} = \frac{1}{2\,k}$

$p(N \cap B) = p\,(N / B) \times p(B)$

Il y a 2 multiples de trois possibles : 3 et 6 donc $p(B) = \frac{2}{6}$

N / B correspond à l'événement "choisir une boule noire dans l'urne 2"

L'urne 2 contient k boules et 2 boules noires donc $p(N / B) = \frac{2}{k}$ donc $p(N \cap B) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{k} = \frac{2}{3\,k}$

$p(N \cap C) = p\,(N / C) \times p(C)$

On a un numéro qui n'est ni le 1 ni un multiple de trois : soit 3 possibilités : 2 ; 4 ; 5 donc $p(C) = \frac{3}{6}$

N / C correspond à l'événement "choisir une boule noire dans l'urne 3"

L'urne 3 contient k boules et 1 boules noires donc $p(N / C) = \frac{1}{k}$ donc $p(N \cap C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{k} = \frac{1}{2\,k}$

$p(N) = p(N \cap A) + p\,(N \cap B) + p\,(N \cap C)$ donc $p(N) = \frac{1}{2\,k} + \frac{2}{3\,k} + \frac{1}{2\,k}$ donc $p(N) = \frac{5}{3\,k}$

b. $p(A / N) = \frac{p(N \cap A)}{p(N)} = \frac{\frac{1}{2\,k}}{\frac{5}{3\,k}} = \frac{1}{2\,k} \times \frac{3\,k}{5} = \frac{3}{10}$ soit $p(A / N) = 0{,}3$

c. $p(N) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{3\,k} > \frac{1}{2}$ or $k > 0$ donc $p(N) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 10 > 3\,k \Leftrightarrow 3 \geq k > 0$ or $k \geq 3$ donc $p(N) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 3$

d. $p(N) = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{5}{3\,k} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow 5 \times 30 = 3\,k \Leftrightarrow k = 50.$

2. On a une succession de 20 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

- on obtient une boule noire en jouant une partie ($p = \frac{1}{30}$)
- on n'obtient pas une boule noire en jouant une partie ($q = 1 - p = \frac{29}{30}$)

donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de boules noires obtenues suit une loi binomiale de paramètres (20 ; p) et $P(X = k) = \binom{20}{k} p^{k} q^{20-k}$

la probabilité que le joueur obtienne au moins une fois une boule noire est égale à $1 - p\,(X = 0)$

donc $p = 1 - q^{20} = 1 - \left(\frac{29}{30}\right)^{20}$ donc $q \approx 0{,}492$

Exercice 3
Partie A. Etude d'une fonction auxiliaire

1\. *a.* $\varphi(x) = x^2 e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) - 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$

b. $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)\,e^{-x} - 1$.
les fonctions $x \to x^2 + x + 1$ et $x \to e^{-x}$ sont définie dérivable sur $\mathbb{R}$ donc leur produit aussi donc φ est définie dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\varphi'(x) = (2x + 1)\,e^{-x} - e^{-x}(x^2 + x + 1)$
$\varphi'(x) = e^{-x}(x - x^2)$
$\varphi'(x) = e^{-x}\,x\,(1 - x)$
Une exponentielle est toujours positive donc $\varphi'(x)$ a le même signe que $x(1 - x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$3e^{-1} - 1$	$\searrow$	-1

2\. La fonction φ est définie continue, strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; 1]$ donc si $x \neq 0$; et $x < 1$ alors $\varphi(x) > 0$; si $x = 0$ alors $\varphi(0) = 0$ donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une seule solution dans $]-\infty ; 1]$.

La fonction φ est définie continue, strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$; $\varphi([1 ; +\infty[) =]-1 ; 3e^{-1} - 1]$
$0 \in \varphi([1 ; +\infty[)$ donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une seule solution α dans $[1 ; +\infty[$.
Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une α dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

φ est strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$; $\varphi(\alpha) = 0$
$\varphi(1,79) > 0$ et $\varphi(1,80) < 0$ donc $1,79 < \alpha < 1,80$

3\. φ est strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$; $\varphi(\alpha) = 0$
donc si $1 \leq x < \alpha$ alors $\varphi(x) > 0$
si $x > \alpha$ alors $\varphi(x) < 0$
d'après la question précédente, si $x \neq 0$; et $x < 1$ alors $\varphi(x) > 0$; si $x = 0$ alors $\varphi(0) = 0$
d'où le tableau des signes de φ :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Partie B . Etude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

1\. $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$
$f'(x) = 2e^{-x} - e^{-x}(2x + 1)$ donc $f'(x) = e^{-x}(-2x + 1)$
$f'(0) = 1$

$g'(x) = \dfrac{2(x^2 + x + 1) - 2x(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$

$g'(0) = 1$
Les tangentes aux deux courbes en A passent par A et ont le même coefficient directeur 1 donc sont confondues.
Les deux courbes passent par le point A de coordonnées (0, 1) et admettent en ce point la même tangente.

2\. *a.* $f(x) - g(x) = (2x + 1)\,e^{-x} - \dfrac{2x+1}{x^2 + x + 1}$

$f(x) - g(x) = (2x + 1)\left(e^{-x} - \dfrac{1}{x^2 + x + 1}\right)$

$f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1)\,\varphi(x)}{x^2 + x + 1}$

b. $x^2 + x + 1 = 0$ n'admet pas de solution réelle donc $x^2 + x + 1$ est toujours strictement positif.

x	$-\infty$		$-0{,}5$		0		α		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$			
$\varphi(x)$		$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

c. Soit M un point de C_f d'abscisse x, $y_M = f(x)$. Soit P le point de C_g d'abscisse x, $y_P = g(x)$
$y_M - y_P = f(x) - g(x)$ donc

x	$-\infty$		$-0{,}5$		0		α		$+\infty$
$y_M - y_P$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Sur $]-\infty\,;-0{,}5[$ alors C_f est en dessous de C_g
Sur $]-0{,}5\,;0[$ alors C_f est au dessus de C_g
Sur $]0\,;\alpha[$ alors C_f est au dessus de C_g
Sur $]\alpha\,;+\infty[$ alors C_f est en dessous de C_g
Les courbes se coupent aux points d'abscisses $-0{,}5$; 0 et α.

3\. *a.* h est définie dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -2\,e^{-x} - e^{-x}(-2x-3) - \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

$h'(x) = e^{-x}(2x+1) - \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} = f(x) - g(x)$, donc h est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \to f(x) - g(x)$.

b. Sur $[-0{,}5\,;0]$, C_f est au dessus de C_g donc $A = \displaystyle\int_{-0{,}5}^{0} (f(x) - g(x))\,dx = h(0) - h(-0{,}5)$

$h(0) = -3$ et $h(-0{,}5) = -2\,e^{0{,}5} - \ln(0{,}75)$

$A = -3 + 2\,e^{0{,}5} + \ln(0{,}75)$
$A = 0{,}0098$ *u.a.*

Exercice 4
Partie A

1. $\Delta = 4 - 4 \times 4 = -12 = \left(2\,\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$ donc $z' = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $z'' = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

$|z'| = 2$ et arg $z' = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donc $z' = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

z' et z'' sont des complexes conjugués donc $|z''| = 2$ et arg $z'' = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donc $z'' = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

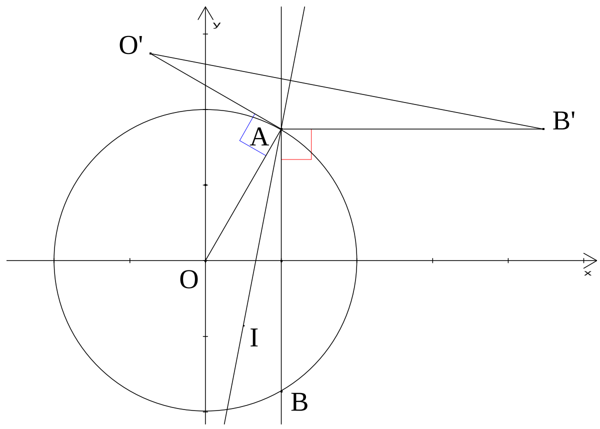
2. $(z')^{2004} = 2^{2004}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2004\pi}{3}}$ or $2004 = 3 \times 668$ donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2004\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,668\pi} = 1$ donc $(z')^{2004} = 2^{2004}$

Partie B

1. $|z'| = |z''| = 2$ donc OA = OB = 2
Les points A d'affixe $1 + i\sqrt{3}$ et B d'affixe $1 - i\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O de rayon 2.

2. r_1 admet pour écriture complexe : $z' - (1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}[z - (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})]$
soit $z' = -\mathrm{i}z + 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(-1 - \sqrt{3})$ donc le point O est transformé en le point O' tel que : $z_{O'} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} + \mathrm{i} - \sqrt{3}$
O' a pour affixe : $1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}(1 + \sqrt{3})$

r_1 admet pour écriture complexe : $z' - (1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) = e^{i\frac{\pi}{2}}[z - (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})]$ soit $z' = \mathrm{i}z + 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(-1 + \sqrt{3})$
donc le point B est transformé en le point B' tel que : $z_{B'} = \mathrm{i}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) + 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(-1 + \sqrt{3})$
$z_{B'} = \mathrm{i} + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(-1 + \sqrt{3})$ donc $z_{B'} = 1 + 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\sqrt{3}$. B' a pour affixe : $1 + 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\sqrt{3}$



3. *a*. Au vu du graphique, on peut supposer que (AI) est la hauteur issue de A du triangle AO'B'.

b. I a pour affixe $\dfrac{1}{2}(z_O + z_B) = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\overrightarrow{AI}$ a pour affixe $z_I - z_A$ soit $\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} - (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$
soit $\overrightarrow{AI}$ a pour affixe $-\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
$\overrightarrow{O'B'}$ a pour affixe $z_{B'} - z_{O'}$ soit $1 + 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\sqrt{3} - [1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}(\sqrt{3} + 1)]$ donc $\overrightarrow{O'B'}$ a pour affixe $3\sqrt{3} - \mathrm{i}$

c. $\overrightarrow{O'B'} \cdot \overrightarrow{AI} = -\dfrac{1}{2} \times 3\sqrt{3} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \times (-1)$ donc $\overrightarrow{O'B'} \cdot \overrightarrow{AI} = -3\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ soit $\overrightarrow{O'B'} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$
La conjecture émise à la question 3. *a*. est vraie.

Exercice 4 (5 points) spécialité

1. A est un point du cercle de centre B de rayon AB donc pour montrer que (OA) est tangente au cercle C, il suffit de vérifier que la droite (OA) est perpendiculaire en A à (AB).

$\overrightarrow{OA} = 5\vec{j} + 5\vec{k}$ donc a pour coordonnées (5 ; 5) dans le repère (O ; $\vec{j}$, $\vec{k}$).

$\overrightarrow{AB} = -5\vec{j} + 5\vec{k}$ donc a pour coordonnées (– 5 ; 5) dans le repère (O ; $\vec{j}$, $\vec{k}$).

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = -5 \times 5 + 5 \times 5 = 0$

donc la droite (OA) est perpendiculaire en A à (AB).

La droite (OA) est la tangente en A au cercle C.

2. *a*. $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées (5 ; 5) dans le repère (O ; $\vec{j}$, $\vec{k}$) donc A est un point de la droite d'équation $y = z$ du plan P_0 donc ($\vec{k}$; $\overrightarrow{OA}$) a pour mesure $\frac{\pi}{4}$.

Γ est le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (O*z*) donc a pour équation $x^2 + y^2 = \tan\frac{\pi}{4}\, z^2$ soit $x^2 + y^2 = z^2$.

b. S est la sphère de centre B de rayon AB

donc $x^2 + y^2 + (z - 10)^2 = 5^2 + 5^2$

S a pour équation $x^2 + y^2 + (z - 10)^2 = 50$

Le cône Γ admet pour équation : $x^2 + y^2 = z^2$ donc leur intersection vérifie $x^2 + y^2 + (z - 10)^2 = 50$ et $x^2 + y^2 = z^2$

$\Leftrightarrow z^2 + (z - 10)^2 = 50$ et $x^2 + y^2 = z^2$

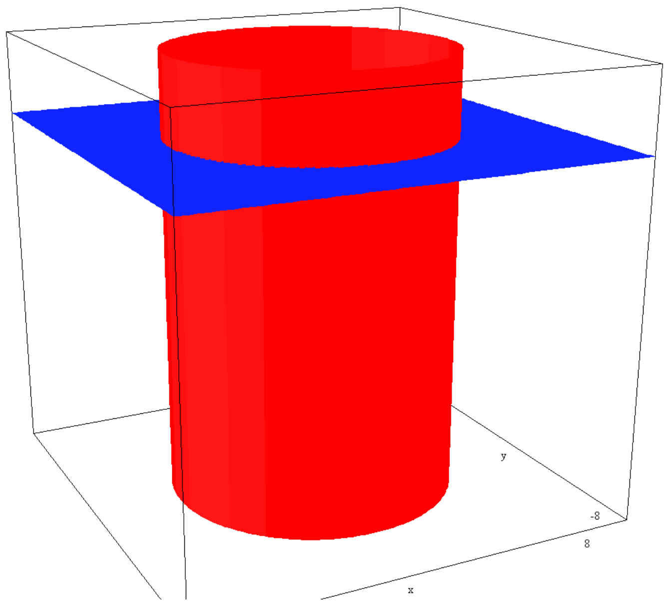
$\Leftrightarrow 2z^2 - 20z + 100 = 50$ et $x^2 + y^2 = z^2$

$\Leftrightarrow (z - 5)^2 = 0$ et $x^2 + y^2 = z^2$

$\Leftrightarrow z = 5$ et $x^2 + y^2 = 25$

on a l'intersection du cylindre de révolution autour de l'axe (O*z*) d'équation $x^2 + y^2 = 25$ et du plan d'équation $z = 5$ perpendiculaire à l'axe (O*z*) ; on obtient donc un cercle de centre le point d'intersection de l'axe (O*z*) et du plan et de rayon le rayon du cylindre, soit le cercle de centre (0 ; 0 ; 5) et de rayon 5.

c.



3. L'axe (O*z*) du cône est parallèle au plan d'équation $x = 1$

Compte tenu des figures : l'intersection d'un plan et d'un cône est :

- un cercle si le plan est perpendiculaire à l'axe du cône, ce qui n'est pas le cas
- deux droites sécantes si le plan contient l'axe du cône, ce qui n'est pas le cas
- une hyperbole si le plan de section est parallèle strictement à l'axe du cône ce qui est le cas

Donc l'intersection est représentée par la figure 3.

4. si x et y sont simultanément impairs, il existe deux entiers relatifs n et p tels que $x = 2n + 1$ et $y = 2p + 1$

donc $z^2 = 4(n^2 + p^2 + n + p) + 2$ donc $z^2 \equiv 2\ [4]$

or z est un entier relatif donc on a soit

$z \equiv 0\ [4]$ donc $z^2 \equiv 0\ [4]$

$z \equiv 1\ [4]$ donc $z^2 \equiv 1\ [4]$

$z \equiv 2\ [4]$ donc $z^2 \equiv 0\ [4]$

$z \equiv 3\ [4]$ donc $z^2 \equiv 1\ [4]$

dans tous les cas z^2 n'est pas congru à 2 modulo 4 donc on ne peut pas avoir x et y simultanément impairs.