Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$

1. Monter que pour tout entier naturel n différent de 0, u_n est bien défini et est compris entre 0 et 1
2. *a.* Etudier les variations de la suite (u_n)

   b. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite
3. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$.

CORRECTION

Préambule : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$, il faut donc étudier le sens de variation de la fonction f.

La dérivée de $\sqrt{u}$ est $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x)=\dfrac{1+x}{2}$ donc

$u'(x)=\dfrac{1}{2}$ donc $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1+x}}$

f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, et $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

donc pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

1. **Récurrence :**

Initialisation : u_1 est bien défini et $u_1 = 0$ donc $0 \leq u_1 \leq 1$

Hérédité : Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, si u_n est bien défini et $0 \leq u_n \leq 1$ alors u_{n+1} est bien défini et $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

$0 \leq u_n \leq 1$ donc $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1+u_n}{2} \leq 1$ donc u_{n+1} est bien défini

La fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$ soit $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq u_{n+1} \leq 1$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n est bien défini et $0 \leq u_n \leq 1$

2. *a.* **Récurrence :**

Initialisation : $u_1 = 0$ et $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $u_0 \leq u_1 \leq u_2$

Hérédité : Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, si $u_n \leq u_{n+1}$ alors $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

La fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \leq u_{n+1}$

De plus $u_0 \leq u_1$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$, la suite (u_n) est croissante.

b. La suite (u_n) est croissante, majorée par 1 donc la suite (u_n) converge vers un nombre compris entre 0 et 1.

La limite de la suite est solution de l'équation $f(x) = x$ donc de $x = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$.

$x^2 = \dfrac{1+x}{2}$ donc $2x^2 - x - 1 = 0$ donc $x = 1$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$

La suite (u_n) converge soit vers $-\dfrac{1}{2}$ soit vers 1 or elle converge vers un nombre compris entre 0 et 1 donc vers 1.

3. **Récurrence :**

Initialisation : $u_0 = -1$ donc $u_0 = \cos\pi = \cos\dfrac{\pi}{2^0}$

Hérédité : Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, si $u_n = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$ alors $u_{n+1} = \cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

$1 + \cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ donc $1 + \cos\dfrac{\pi}{2^n} = 2\cos^2\dfrac{\frac{\pi}{2^n}}{2} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

$n \in \mathbb{N}$ donc $n + 1 \geq 1$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$0 \leq \frac{\pi}{2^{n+1}} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{donc } \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \geq 0$$

donc $\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{2^n}}{2}} = \sqrt{\cos^2\dfrac{\pi}{2^{n+1}}} = \cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

donc $u_{n+1} = \cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$