On se propose de trouver le jour de la semaine associé à une date donnée.
Pour cela, on utilise le calendrier depuis le 20 décembre 1582.
On rappelle que le mois de février compte 29 ou 28 jours, selon que l'année est bissextile ou non.
Une année est bissextile lorsque son millésime A est un multiple de 400 ou lorsque A est un multiple de 4 sans être un multiple de 100 (ainsi 1900 n'est pas bissextile).

1. a et b désignent deux entiers naturels avec $b \neq 0$. q est le quotient de la division euclidienne de a par b.

Démontrer que $q = \mathrm{E}\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

2. On note B le nombre d'années bissextiles qui ont précédé strictement le 1^er^ janvier de l'année A depuis la date fictive du 1^er^ janvier de l'an 1 (qui va nous servir d'origine des dates).

a) Démontrer que : $\mathrm{B} = \mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{A}-1}{4}\right) - \mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{A}-1}{100}\right) + \mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{A}-1}{400}\right)$.

b) Démontrer que le nombre N de jours dans les années qui précèdent l'année A est donné par : $\mathrm{N} = \mathrm{B} + 365\,(\mathrm{A} - 1)$.

c) On note (J ; M ; A) une date : J entre 1 et 31, M entre 1 et 12, A l'année (avec $\mathrm{A} \geq 1582$)
Comment calculer le nombre R de jours entre les dates (1 ; 1 ; A) et (J ; M ; A) (ces deux jours compris) ?

d) Le nombre N de jours entre les dates (1 ; 1 ; 1) et (J ; M ; A) est donc : $\mathrm{N} = \mathrm{R} + \mathrm{B} + 365\,(\mathrm{A} - 1)$
Vérifier que $\mathrm{N} \equiv \mathrm{A} - 1 + \mathrm{B} + \mathrm{R}\ [7]$.

e) En sachant que le 1er janvier 2003 est un mercredi, vérifier que le nombre N associé à mercredi à mercredi 1^er^ janvier 2003 vérifie: $\mathrm{N} \equiv 3\ [7]$.

3. *a*) Quel jour de la semaine était le 14 juillet 1789 ?

b) L'acte V de Cyrano de Bergerac se déroule en septembre 1655. Edmond Rostand écrit: "Et samedi 26, une heure avant dîner, Monsieur de Bergerac est mort assassiné." Le 26 septembre 1655 était-il un samedi?

CORRECTION

1. a et b désignent deux entiers naturels avec $b \neq 0$, q est le quotient de la division euclidienne de a par b donc il existe un entier naturel r tel que $0 \leq r < b$ et $a = b\,q + r$ donc $\dfrac{a}{b} = q + \dfrac{r}{b}$ et $0 \leq \dfrac{r}{b} < 1$ donc $q \leq \dfrac{a}{b} < q + 1$ donc $q = \mathrm{E}\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

2. *a*. Entre le 1^er^ janvier de l'année A et le 1^er^ janvier de l'an 1, se sont déroulées A – 1 années,
En effectuant la division euclidienne de A – 1 par 4, il existe deux entiers naturels q et r tels que $\mathrm{A} - 1 = 4\,q + r$ avec $0 \leq r < 4$
Il y a donc $q = \mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{A}-1}{4}\right)$, il existe donc $\mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{A}-1}{4}\right)$ multiples de 4 compris entre A et 1.

De même il existe $\mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{A}-1}{100}\right)$ multiples de 100 compris entre A et 1.

Le nombre $\mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{A}-1}{4}\right) - \mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{A}-1}{100}\right)$ est le nombre des multiples de 4 qui ne sont pas multiples de 100 (les multiples de 400 sont donc exclus).

Il existe $\mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{A}-1}{400}\right)$ multiples de 400 compris entre A et 1 donc le nombre d'années bissextiles comprises entre 1 et A est :

$\mathrm{B} = \mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{A}-1}{4}\right) - \mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{A}-1}{100}\right) + \mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{A}-1}{400}\right)$.

b. Pendant A – 1 années se sont déroulés $(\mathrm{A} - 1) \times 365$ nombres de jours auxquels ont doit ajouter les B jours additionnels des années bissextiles donc le nombre N de jours dans les années qui précèdent l'année A est donné par : $\mathrm{N} = \mathrm{B} + 365\,(\mathrm{A} - 1)$.

c. Entre (1 ; 1 ; A) et (1 ; M ; A) se sont déroulés si A n'est pas une année bissextile :

M	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
R	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335

entre (J ; M ; A) et (1 ; 1 ; A)

M	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
R	J	31 + J	59 + J	90 + J	120 + J	151 + J	181 + J	212 + J	243 + J	273 + J	304 + J	334 + J

Entre (1 ; 1 ; A) et (1 ; M ; A) se sont déroulés si A est une année bissextile :

M	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
R	1	32	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336

entre (J ; M ; A) et (1 ; 1 ; A)

M	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
R	J	31 + J	60 + J	91 + J	121 + J	152 + J	182 + J	213 + J	244 + J	274 + J	305 + J	335 + J

d. Le nombre N de jours entre les dates (1 ; 1 ; 1) et (J ; M ; A) est donc : $N = R + B + 365\,(A - 1)$

$365 = 7 \times 52 + 1$ donc $365 \equiv 1\ [7]$ donc $R + B + 365\,(A - 1) \equiv R + B + A - 1\ [7]$ donc $N \equiv A - 1 + B + R\ [7]$.

e. En sachant que le 1er janvier 2003 est un mercredi, vérifier que le nombre N associé à mercredi 1er janvier 2003 vérifie : $N \equiv 3$ [7].

$$B = E\left(\frac{2003-1}{4}\right) - E\left(\frac{2003-1}{100}\right) + E\left(\frac{2003-1}{400}\right) = 500 - 20 + 5 = 485 \text{ et } R = 1$$

$$N \equiv 2003 - 1 + E\left(\frac{2003-1}{4}\right) - E\left(\frac{2003-1}{100}\right) + E\left(\frac{2003-1}{400}\right) + 1 = 2003 + 485 = 2488$$

$2488 = 7 \times 385 + 3$ donc $N \equiv 3\ [7]$

3. *a*. Entre le (1 ; 1 ; 1) et le (14 ; 07 ; 1789) il y a eu $B = E\left(\frac{1789-1}{4}\right) - E\left(\frac{1789-1}{100}\right) + E\left(\frac{1789-1}{400}\right) = 434$ années bissextiles.

1789 n'est pas une année bissextile donc $R = 181 + 14 = 195$

Le nombre N de jours entre les dates (1 ; 1 ; 1) et (14 ; 07 ; 1789) est $N = 434 + 365 \times 1788 + 195$

$N \equiv 434 + 1788 + 195\ [7]$ or $2\,416 = 7 \times 345 + 2$ donc $2\,416 \equiv 2\ [7]$ donc le 14 juillet 1789 était un mardi.

b) Entre le (1 ; 1 ; 1) et le (26 ; 09 ; 1655) il y a eu $B = E\left(\frac{1655-1}{4}\right) - E\left(\frac{1655-1}{100}\right) + E\left(\frac{1655-1}{400}\right) = 413 - 16 + 4 = 401$ années bissextiles.

1655 n'est pas une année bissextile donc $R = 243 + 26 = 269$

Le nombre N de jours entre les dates (1 ; 1 ; 1) et (26 ; 09 ; 1655) est $N = 401 + 365 \times 1654 + 269$

$N \equiv 401 + 1654 + 269\ [7]$ soit $N \equiv 2324\ [7]$

$2324 = 7 \times 332$ donc $N \equiv 0\ [7]$ donc le 26 septembre 1655 était un dimanche.