Partie A :

On considère le polynôme P défini sur C par : $P(z) = z^3 - (2 + \mathrm{i}\sqrt{2})\, z^2 + 2\,(1 + \mathrm{i}\sqrt{2})\, z - 2\,\mathrm{i}\sqrt{2}$.

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2. *a.* Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z - \mathrm{i}\sqrt{2})\,(z^2 + a\,z + b)$.

b. En déduire les solutions dans C de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives : $z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = 1 - \mathrm{i}$, $z_{\mathrm{J}} = \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_{\mathrm{K}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

1. Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.

3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4. Soit D le point d'affixe $z_{\mathrm{D}} = -1 + \mathrm{i}$. On considère la rotation r de centre O qui transforme J en D.

a. Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r.

b. Soit C l'image du point L par la rotation r. Déterminer l'affixe du point C.

5. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD? Justifier la réponse.

CORRECTION

Partie A :

1. $z_0^{\,2} = -2$ et $z_0^{\,3} = -2\,\mathrm{i}\sqrt{2}$ donc

$P(z_0) = -2\,\mathrm{i}\sqrt{2} - (2 + \mathrm{i}\sqrt{2})(-2) + 2\,(1 + \mathrm{i}\sqrt{2})(\mathrm{i}\sqrt{2}) - 2\,\mathrm{i}\sqrt{2}$.

$P(z_0) = -2\,\mathrm{i}\sqrt{2} + 4 - 2\,\mathrm{i}\sqrt{2} + 2\,\mathrm{i}\sqrt{2} - 4 - 2\,\mathrm{i}\sqrt{2}$.

$P(z_0) = 0$ donc le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2. *a.* En développant $(z - \mathrm{i}\sqrt{2})\,(z^2 + a\,z + b)$ on trouve

$z^3 + (a - \mathrm{i}\sqrt{2})\,z^2 + (b - \mathrm{i}\sqrt{2}\,a)\,z - \mathrm{i}\sqrt{2}\,b$

donc $\begin{cases} a - \mathrm{i}\sqrt{2} = -2 - \mathrm{i}\sqrt{2} \\ b - \mathrm{i}\sqrt{2}\,a = 2\,(1 + \mathrm{i}\sqrt{2}) \\ -\mathrm{i}\sqrt{2}\,b = -2\,\mathrm{i}\sqrt{2} \end{cases}$

les lignes (1) et (3) donnent : $a = -2$ et $b = 2$

vérification : $b - \mathrm{i}\sqrt{2}\,a = 2 + 2\,\mathrm{i}\sqrt{2}$, la ligne (2) est donc vérifiée donc $P(z) = (z - \mathrm{i}\sqrt{2})\,(z^2 - z + 2)$

b. $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - \mathrm{i}\sqrt{2})\,(z^2 - z + 2) = 0$

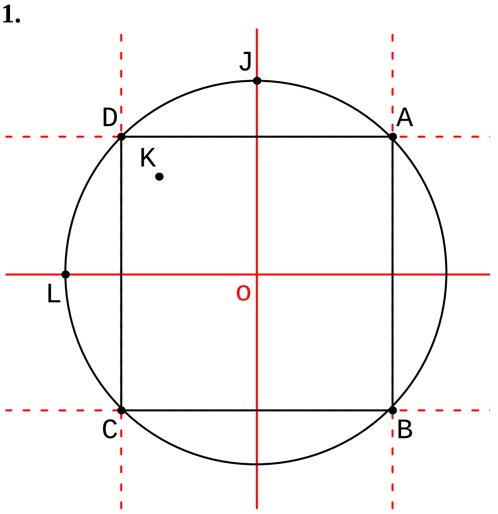
$\Leftrightarrow z - \mathrm{i}\sqrt{2} = 0$ ou $z^2 - z + 2 = 0$

$z^2 - 2\,z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z - 1 = \mathrm{i}$ ou $z - 1 = -\mathrm{i} \Leftrightarrow z = 1 + \mathrm{i}$ ou $z = 1 - \mathrm{i}$

Les solutions dans C de l'équation $P(z) = 0$ sont donc $\mathrm{i}\sqrt{2}$; $1 + \mathrm{i}$ et $1 - \mathrm{i}$.

Partie B :

1.



2. $z_{\mathrm{K}} = \cos\dfrac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

K est le milieu de [JL] donc $z_{\mathrm{K}} = \dfrac{1}{2}(z_{\mathrm{L}} + z_{\mathrm{J}})$

donc $z_{\mathrm{L}} = 2\,z_{\mathrm{K}} - z_{\mathrm{J}} = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

L'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.

3. OA = | 1 + i | = $\sqrt{2}$, OB = | 1 – i | = $\sqrt{2}$; OJ = | i $\sqrt{2}$ | = $\sqrt{2}$ et
OL = | – $\sqrt{2}$ | = $\sqrt{2}$ donc OA = OB = OJ = OL = $\sqrt{2}$ donc les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

4. ***a.*** r est la rotation r de centre O qui transforme J en D donc l'angle de la rotation r est $(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OD})$

$$(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OD}) = \arg\left(\frac{z_D}{z_J}\right) \text{ or } \frac{z_D}{z_J} = \frac{-1+i}{i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Une mesure de l'angle de la rotation r est $\frac{\pi}{4}$.

b. La rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{4}$ a pour écriture complexe :

$$z' = e^{i\frac{\pi}{4}} z \text{ soit } z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z$$

donc l'affixe de C image de L par r est

$$z_C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times (-\sqrt{2}) = -1 - i$$

5. $z_C = -z_A$ et $z_D = -z_B$ donc les diagonales du quadrilatère ABCD ont le même milieu O donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
OD = | – 1 + i | = $\sqrt{2}$ donc le triangle ACD est inscrit dans le cercle de centre O de rayon $\sqrt{2}$, de diamètre [AC] donc le triangle ACD est rectangle en D donc le parallélogramme ABCD est un rectangle.
AB = | 1 – i – (1 + i) | = | – 2 i | = 2
BC = | 1 – i – (– 1 – i) | = | 2 | = 2 donc le rectangle ABCD a deux côtés consécutifs de même longueur donc est un carré.