Partie A
Restitution organisée de connaissances

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ et soit P un plan.

On considère deux droites sécantes et contenues dans P : la droite $\mathbf{D}_1$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ et la droite $\mathbf{D}_2$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$.

Montrer que Δ est orthogonale à toute droite de P si et seulement si Δ est orthogonale à $\mathbf{D}_1$ et à $\mathbf{D}_2$.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points A(0 ; − 1 ; 1), B(4 ; − 3 ; 0) et C(− 1 ; − 2 ; − 1).

On appelle P le plan passant par A, B et C.

On appelle Δ la droite ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 1 \\ z = -2t + 8 \end{cases}$ avec t appartenant à $\mathbb{R}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. **Affirmation 1** : Δ est orthogonale à toute droite du plan P.
2. **Affirmation 2** : les droites Δ et (AB) sont coplanaires.
3. **Affirmation 3** : Le plan P a pour équation cartésienne $x + 3y - 2z + 5 = 0$.
4. On appelle **D** la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\vec{u}$ (11 ; − 1 ; 4).

Affirmation 4 : La droite **D** est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

CORRECTION

Partie A Restitution organisée de connaissances

$\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$ sont deux droites sécantes de P donc pour toute droite **D** du plan ¨P de vecteur directeur $\vec{u}$, il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{u} = \lambda\,\overrightarrow{u_1} + \mu\,\overrightarrow{u_2}$.

Si Δ est orthogonale à $\mathbf{D}_1$ et à $\mathbf{D}_2$ alors $\vec{v}.\overrightarrow{u_1} = \vec{v}.\overrightarrow{u_2} = 0$ donc $\vec{v}.\vec{u} = \lambda\,\vec{v}.\overrightarrow{u_1} + \mu\,\vec{v}.\overrightarrow{u_2} = 0$ donc Δ est orthogonale à **D**.

Réciproquement si Δ est orthogonale à toute droite de P alors en particulier, comme $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$ sont deux droites de P alors, Δ est orthogonale à $\mathbf{D}_1$ et à $\mathbf{D}_2$.

d'où l'équivalence : Δ est orthogonale à toute droite de P si et seulement si Δ est orthogonale à $\mathbf{D}_1$ et à $\mathbf{D}_2$.

Partie B

1. **Affirmation 1** : VRAIE

$\overrightarrow{AB}$ (4 ; − 2 ; − 1) et $\overrightarrow{AC}$ (− 1 ; − 1 ; − 2)

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et (AC) sont sécantes.

Un vecteur directeur de Δ est $\vec{v}$ (1 ; 3 ; – 2)

$\vec{v}.\overrightarrow{AB} = 1 \times 4 + 3 \times (-2) + (-2) \times (-1) = 4 - 6 + 2 = 0$

$\vec{v}.\overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + 3 \times (-1) + (-2) \times (-2) = -1 - 3 + 4 = 0$

Δ est orthogonale à deux droites sécantes (AB) et (AC) du plan P donc Δ est orthogonale à toute droite du plan P.

2. **Affirmation 2** : FAUSSE

(AB) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 4t' \\ y = -2t' - 1 \\ z = -t' + 1 \end{cases}$

Δ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 1 \\ z = -2t + 8 \end{cases}$

(AB) et Δ ne sont pas parallèles donc cherchons si elles sont sécantes.

Le point d'intersection de Δ et (AB) est le point dont les coordonnées vérifient : $\begin{cases} x = 4t' = t \\ y = -2t' - 1 = 3t - 1 \\ z = -t' + 1 = -2t + 8 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 4t' - t = 0 \\ 2t' + 3t = 0 \\ t' - 2t = -7 \end{cases}$

les deux premières lignes donnent t = t' = 0 ce qui n'est pas vérifié par la troisième ligne du système donc les droites Δ et (AB) ne sont ni parallèles ni sécantes donc ne sont pas coplanaires.

3. **Affirmation 3** : FAUSSE

$0 - 3 - 2 + 5 = 0$ donc A $\in$ P

$4 + 3 \times (-3) + 5 = 0$ donc B $\in$ P

$-1 + 3 \times (-2) - 2 \times (-1) = -1 - 6 + 2 = -3$ donc C $\notin$ P

Le plan P contient les points A, B et C donc l'affirmation est fausse.

4. **Affirmation 4** : VRAIE

Soit P' le plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

D a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 11t \\ y = -t \\ z = 4t \end{cases}$

Le point d'intersection de **D** et P' est le point dont les coordonnées vérifient : $x + 3y - 2z + 5 = 0$ et $\begin{cases} x = 11t \\ y = -t \\ z = 4t \end{cases}$

or $11t + 3 \times (-t) - 2 \times 4t + 5 = 5$ donc **D** et P' n'ont pas de point d'intersection donc la droite **D** est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.