Amérique du Nord, 1996

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On imagine n sacs de jetons S_1, S_2, ., S_n. Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc. On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

Première étape : on tire au hasard un jeton de S_1 ;

Deuxième étape : on place ce jeton dans S_2, et on tire, au hasard, un jeton de S_2 ;

Troisième étape : après avoir placer dans S_3 le jeton sorti de S_2, on tire, au hasard, un jeton de S_3. et ainsi de suite.

Pour tout entier naturel k tel que $1< k < n$, On note E_k l'événement "le jeton tiré de S_k est blanc"

1 : Déterminez la probabilité de E_1, notée $P(E_1)$, et les probabilités conditionnelles : $P(E_2 / E_1)$ et $P(E_2 / \overline{E_1})$

Déduisez-en la probabilité de E_2, notée $P(E_2)$.

Pour tout entier k tel que $1 < k < n$, la probabilité de E_k est notée p_k.

Justifiez la relation de récurrence suivante : $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$

2 : Etude d'une suite (u_k).

On note (u_k) la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \text{ et} \\ \text{pour tout entier } k \geq 1,\ u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3} \end{cases}$

On considère la suite (v_k) définie par, pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, $v_k = u_k - 0{,}5$.

Démontrez que la suite (v_k) est une suite géométrique.

Déduisez-en l'expression de u_k en fonction de k.

Montrez que la suite (u_k) est convergente et précisez sa limite.

3 : Dans cette question, on suppose que $n = 10$. Déterminez pour quelles valeur de k on a : $0{,}4999 < p_k < 0{,}5$

CORRECTION

Le sac S_1 contient 2 jetons noires et 1 jeton blanc. et tous les autres sac contiennent un jeton noir et 1 jeton blanc.

E_k est l'événement " le jeton tiré du sac k est blanc"

1 : *a*) D'après le texte ; on a : $p(E_1) = \frac{1}{3}$; $p(E_2 / E_1) = \frac{2}{3}$; $p(E_2 / \overline{E_1}) = \frac{1}{3}$

D'après la loi des Probabilités Totales ; on a donc : $p(E_2) = p(E_2 / E_1) \times p(E_1) + p(E_2 / \overline{E_1})\, p(\overline{E_1})$

$p(E_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$ soit $p(E_2) = \frac{4}{9}$

***b*)** Si p_k est la probabilité de E_k ; la probabilité de l'événement contraire de E_k est alors $1 - p_k$.

Or ; d'après le principe de tirage des jetons ; on a :

$p(E_{k+1} / E_k) = \frac{2}{3}$ et $p(E_{k+1} / \overline{E_k}) = \frac{1}{3}$

donc, toujours d'après la loi des probabilités totales, on a :

$p(E_{k+1}) = p(E_{k+1} / E_k) \times p(E_k) + p(E_{k+1} / \overline{E_k}) \times p(\overline{E_k}) = \frac{2}{3}\ p_k + \frac{1}{3}(1 - p_k)$

$p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$

2 : *a*) Pour k entier quelconque > 1 ; on a : $v_{k+1} = u_{k+1} - \frac{1}{2}$ d'après la définition de la relation entre les suites (u_k) et (v_k).

$v_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$ d'après la définition de la relation entre u_{k+1} et u_k.

$v_{k+1} = \frac{1}{3}u_k - \frac{1}{6}$ donc $v_{k+1} = \frac{1}{3}\left(u_k - \frac{1}{2}\right)$ en mettant $\frac{1}{3}$ en facteur, soit $v_{k+1} = \frac{1}{3}\ v_k$

La relation qui vient d'être démontrée entre v_{k+1} et v_k que cette suite est bien géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

***b*)** On connaît l'expression du terme général d'indice n en fonction de n d'une suite géométrique.

Dans le cas de la suite (v_k) ; on peut alors dire que pour tout $k \geq 1$; on a : $v_k = v_1 q^{k-1}$. Comme $v_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$; on peut alors dire que : $v_k = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = -\frac{1}{6}\ \frac{1}{3^{k-1}}$ donc $v_k = -\frac{1}{2 \times 3^k}$

De la relation entre u_k et v_k ; on obtient alors : $u_k = v_k + \frac{1}{2}$

$u_k = -\dfrac{1}{2\times 3^k} + \dfrac{1}{2}$ donc $u_k = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^k}\right)$

On sait que si $q > 1$, $\lim\limits_{k\to+\infty} q^k = +\infty$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} 3^k = +\infty$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{3^k}\right) = 1$

$\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = \dfrac{1}{2}$ donc (u_k) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

3 : La relation $0{,}4999 \leq p_k \leq 0{,}5$; donne, d'après l'expression de u_k en fonction de k ; en remarquant que cette suite n'est rien d'autre que la suite p_k.

$0{,}4999 \leq \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^k}\right) \leq 0{,}5$

donc $0 \leq \dfrac{1}{2\times 3^k} \leq 0{,}0001$

$0 \leq 3^k$ et $3^k \geq 5\,000$

$k \geq \dfrac{\ln 5\,000}{\ln 3}$

$\dfrac{\ln 5\,000}{\ln 3} \approx 7{,}75$ donc $k \geq 8$

Comme $n = 10$; les valeurs de k solutions sont 8 ; 9 ; 10 .