Nouvelle-Calédonie novembre 2016

La société « Bonne Mamie » utilise une machine pour remplir à la chaîne des pots de confiture. On note X la variable aléatoire qui à chaque pot de confiture produit associe la masse de confiture qu'il contient, exprimée en grammes. Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que X suit une loi normale de moyenne $\mu = 125$ et d'écart-type σ.

1. *a.* Pour tout nombre réel t positif, déterminer une relation entre $P(X \leq 125 - t)$ et $P(X \geq 125 + t)$.

b. On sait que 2,3 % des pots de confiture contiennent moins de 121 grammes de confiture. En utilisant la relation précédente, déterminer $P(121 \leq X \leq 129)$.

2. Déterminer une valeur arrondie à l'unité près de σ telle que $P(123 \leq X \leq 127) = 0{,}68$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $\sigma = 2$.

3. On estime qu'un pot de confiture est conforme lorsque la masse de confiture qu'il contient est comprise entre 120 et 130 grammes.

a. On choisit au hasard un pot de confiture de la production. Déterminer la probabilité que ce pot soit conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

b. On choisit au hasard un pot parmi ceux qui ont une masse de confiture inférieure à 130 grammes. Quelle est la probabilité que ce pot ne soit pas conforme ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

4. On admet que la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'un pot de confiture soit conforme est 0,988. On choisit au hasard 900 pots dans la production. On constate que 871 de ces pots sont conformes.

Au seuil de 95 % peut-on rejeter l'hypothèse suivante : « La machine est bien réglée » ?

CORRECTION

1. *a.* La fonction de Gauss est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ soit $x = 125$ donc pour tout nombre réel t positif, $P(X \leq 125 - t) = P(X \geq 125 + t)$.

b. 2,3 % des pots de confiture contiennent moins de 121 grammes de confiture donc $P(X \leq 121) = 0{,}023$

$P(121 \leq X \leq 129) = P(X \leq 129) - P(X \leq 121)$ or $P(X \leq 125 - t) = P(X \geq 125 + t)$ donc $P(X \geq 129) = P(X \leq 121)$

donc $P(X \leq 129) = 1 - P(X \geq 129) = 1 - P(X \leq 121)$

donc $P(121 \leq X \leq 129) = 1 - P(X \leq 121) - P(X \leq 121)$ soit $P(121 \leq X \leq 129) = 1 - 2\, P(X \leq 121)$

$P(121 \leq X \leq 129) = 1 - 0{,}023 \times 2 = 0{,}954$.

2. $P(123 \leq X \leq 127) = 0{,}68$

Soit $T = \dfrac{X - 125}{\sigma}$, T suit une loi normale centrée réduite alors $P(123 \leq X \leq 127) = P\left(\dfrac{-2}{\sigma} \leq T \leq \dfrac{2}{\sigma}\right) = 0{,}68$.

En utilisant la calculette, $\dfrac{2}{\sigma} = 0{,}994$ donc $\sigma = \dfrac{2}{0{,}994}$ soit approximativement $\sigma \approx 2$.

3. *a.* En utilisant la calculette, $P(120 \leq X \leq 130) = 0{,}9876$.

²*b.* $P(X \leq 130) = 0{,}992379$

$$P_{X \leq 130}\,\overline{(120 \leq X \leq 130)} = \frac{P(X \leq 120)}{P(X \leq 130)} = \frac{0{,}00621}{0{,}992379} \approx 61 \times 10^{-4}$$

4. Comme $900 > 30$, $900 \times 0{,}988 > 5$ et $900 \times (1 - 0{,}988) > 5$, les conditions d'application du théorème de Moivre-Laplace sont vérifiées et un intervalle de fluctuation au seuil de 95% est :

$$I = \left[\; p - 1{,}96\,\frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{n}\;;\; p + 1{,}96\,\frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{n}\;\right] \text{ soit } I = \left[\; 0{,}988 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}988\,(1-0{,}988)}}{900}\;;\; 0{,}988 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}988\,(1-0{,}988)}}{900}\;\right]$$

$I \approx [0{,}980;\ 0{,}996]$.

$f_{obs} = \dfrac{871}{900} \approx 0{,}968$ donc $f_{\text{obs}} \notin I$, donc on rejette l'hypothèse « La machine est bien réglée » au seuil de 95%.