Amérique du Nord Juin 03

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^{x})$.

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1\. *a.* On rappelle que: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \dfrac{x}{e^{x}} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c. En déduire que la courbe C admet deux asymptotes que l'on précisera.

2\. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$ par : $g(t) = \dfrac{t}{1+t} - \ln(1 + t)$.

a. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$

b. En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.

3\. *a.* Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^{x})$, f' désignant la fonction dérivée de f .

b. En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

4\. Tracer les asymptotes à la courbe C et la courbe C.

CORRECTION

1\. *a.* Soit $h = e^{x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ et $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^{x}) = \dfrac{\ln(1+h)}{h}$ or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

b. $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^{x}) = e^{-x} \ln\left(e^{x}\left(1+\dfrac{1}{e^{x}}\right)\right) = e^{-x} [\ln(e^{x}) + \ln(1 + e^{-x})] = e^{-x} [x + \ln(1 + e^{-x})]$

$f(x) = \dfrac{x}{e^{x}} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à C en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à C en $+\infty$

2\. *a.* g est définie continue dérivable sur $[-1 ; +\infty[$ et $g'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^{2}} - \dfrac{1}{1+t} = -\dfrac{t}{(1+t)^{2}}$ donc $g'(t) \leq 0$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, ne s'annulant qu'en 0 donc la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b. $g(0) = 0$ et g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ donc si $t > 0$, $g(t) < g(0)$ soit $g(t) < 0$

3\. *a.* $f'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^{x}) + e^{-x} \times \dfrac{e^{x}}{e^{x}+1} = e^{-x} \left[\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1} - \ln(1+e^{x})\right]$

$f'(x) = e^{-x} g(e^{x})$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t > 0$, $g(t) < 0$ donc $g(e^{x}) < 0$ donc $f'(x) < 0$

b. Pour tout x réel, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	1 ↘	0

4.