L'objet du problème est de montrer que, pour n très grand, n ! est comparable à $\dfrac{n^n\sqrt{n}}{e^n}$.

À cette fin on introduit la suite obtenue en faisant le quotient de ces deux quantités.
À l'aide de fonctions étudiées dans les parties I et III on montre d'abord que cette suite a une limite positive ou nulle (partie II), puis que cette limite est strictement positive (partie IV).

Soit donc la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par : $u_n = \dfrac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}$

Partie I Étude du signe d'une première fonction auxiliaire

Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x-\frac{1}{2}} + \ln(x-1) - \ln x$.

1. Calculer la dérivée f' de f et vérifier que, pour tout x dans $]1\,;+\infty[$ on a : $f'(x) = \dfrac{1}{4x(x-1)(x-\frac{1}{2})^2}$.
2. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.
3. Montrer que la limite de $f(x)$, quand x tend vers $+\infty$ est égale à 0.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $]1\,;+\infty[$. En déduire le signe de $f(x)$ pour x dans $]1\,;+\infty[$.
5. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

Partie II Étude de la convergence de la suite (u_n)

Soit (v_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par $v_n = \ln(u_n)$.

1\. *a*. En remarquant que $\ln(n!) = \ln(1) + \ln(2) + \ldots + \ln(n)$, que, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $v_n - v_{n-1} = \left(n - \dfrac{1}{2}\right) f(n)$ où f est la fonction étudiée dans la partie I.

b. Étudier le sens de variation de la suite (v_n), puis le sens de variation de la suite (u_n).

2\. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel positif ou nul, noté ℓ.

Partie III Étude du signe d'une deuxième fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $[2\,;+\infty[$ par $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{5x^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}$, où f est la fonction définie à la partie I.

1\. Calculer la dérivée g' de g et vérifier que, pour tout x dans $[2\,;+\infty[$ $g'(x) = \dfrac{-7x^2+16x-4}{20x^3(x-1)(x-\frac{1}{2})^2}$

2\. Dresser le tableau de variations de g, calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que, pour tout x dans $[2\,;+\infty[$, $g(x)$ est strictement positif. (On ne demande pas de tracer la courbe représentative de g.)

Partie IV

Cette dernière partie a pour but de montrer que la limite ℓ de la suite (u_n) est un réel strictement positif.

1\. Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour $n \geq 2$ par $w_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

a. Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a : $\dfrac{1}{k^2} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}\,dx$. (2)

b. Déduire de (2) l'inégalité, pour n entier supérieur ou égal à 2, $w_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx$ (3).

Interpréter graphiquement les inégalités (2) et (3).

c. Pour n entier supérieur ou égal à 2, calculer $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx$ et montrer que $w_n \leq 1$.

d. Montrer que la suite (w_n) converge vers un réel w vérifiant $w \leq 1$.

2\. *a*. À l'aide de l'égalité (1) établie dans la partie II et en utilisant le signe de la fonction g étudiée dans la partie III, montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a : $v_k - v_{k-1} \geq -\dfrac{1}{5k^2}$.

b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $v_n \geq -\dfrac{1}{5} w_n + 1$

c. Montrer enfin que la limite ℓ de la suite (v_n) est supérieure ou égale à $\dfrac{4}{5}$ et donc est strictement positive.

CORRECTION

Partie I

1. f est la somme de fonctions dérivables donc f est dérivable sur] 1 ; + ∞ [et $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-\frac{1}{2})^2} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-\frac{1}{2})^2} + \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} = \frac{-1}{(x-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{x(x-1)} = \frac{-x(x-1)}{(x-\frac{1}{2})^2\,x(x-1)} + \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{x(x-1)(x-\frac{1}{2})^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+x}{(x-\frac{1}{2})^2\,x(x-1)} + \frac{x^2-x+\frac{1}{4}}{x(x-1)(x-\frac{1}{2})^2} \text{ donc } \frac{1}{4x(x-1)(x-\frac{1}{2})^2}$$

.

2. $\lim\limits_{x\to 1} x-1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x-1) = -\infty$ or $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$

3. $f(x)\ \dfrac{1}{x-\frac{1}{2}} + \ln(x-1) - \ln x = \dfrac{1}{x-\frac{1}{2}} + \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

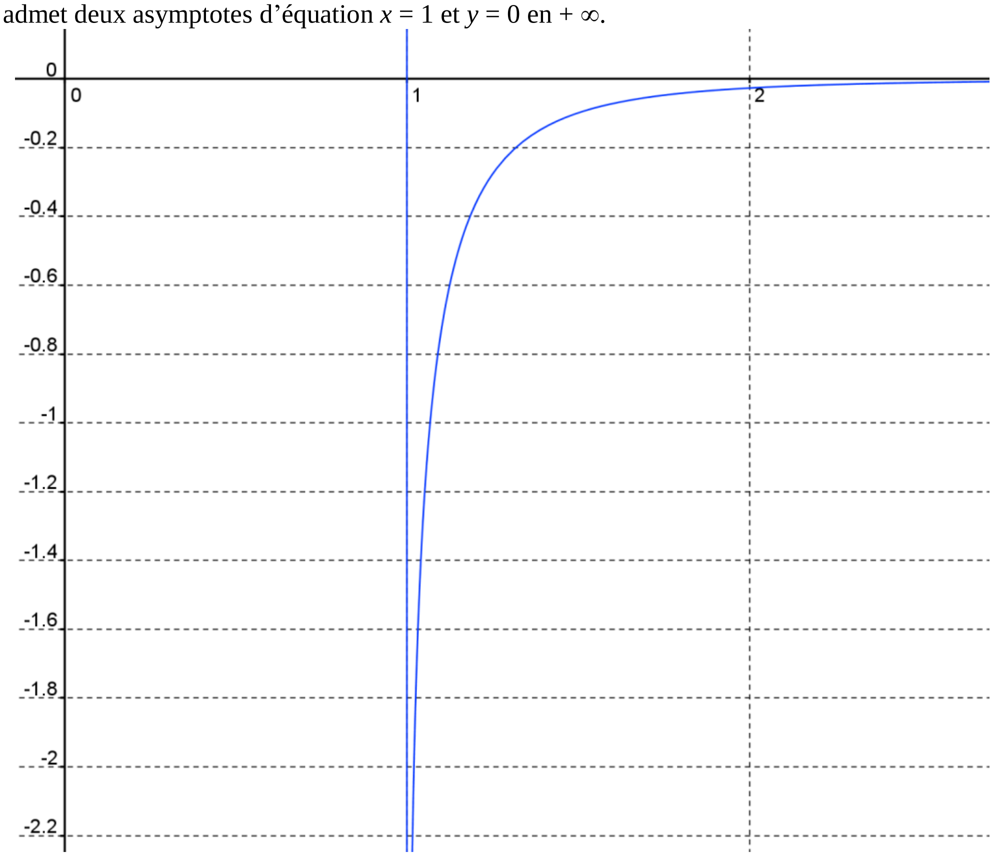
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-\frac{1}{2}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

4. $x > 1$ donc $x - 1 > 0$ et $x(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$

x	1	+ ∞
$f'(x)$	+	
f	− ∞ ↗	0

f est strictement croissante sur] 1 ; + ∞ [et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc pour tout x de] 1 ; + ∞ [, $f(x) < 0$.

5. La courbe de f admet deux asymptotes d'équation $x = 1$ et $y = 0$ en + ∞.



Partie II

1. *a*. $n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ or si a et b sont deux réels strictement positifs ; $\ln(a\,b) = \ln a + \ln b$ donc :

$\ln(n\,!) = \ln(1) + \ln(2) + \ldots + \ln(n)$,

pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$v_n = \ln u_n = \ln\left(\frac{n\,!\,\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\right) = \ln(n\,!) + \ln(\mathrm{e}^n) - n\ln n - \ln\sqrt{n}$$

$$v_n = \ln(1) + \ln(2) + \ldots + \ln(n) + n - n\ln n - \frac{1}{2}\ln n$$

$$v_n = \ln(1) + \ln(2) + \ldots + \ln(n) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n$$

$$v_{n-1} = \ln(1) + \ln(2) + \ldots + \ln(n-1) + (n-1) - (n-1)\ln(n-1) - \frac{1}{2}\ln(n-1)$$

$$v_{n-1} = \ln(1) + \ln(2) + \ldots + \ln(n-1) + (n-1) - \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln(n-1)$$

$$v_n - v_{n-1} = \ln n + n - (n-1) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln(n-1)$$

$$v_n - v_{n-1} = 1 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln(n-1)$$

$$f(n) = \frac{1}{n - \frac{1}{2}} + \ln(n-1) - \ln n \text{ donc } v_n - v_{n-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) f(n)$$

b. pour tout x de $]\,1\,;+\infty\,[$, $f(x) < 0$ or $n \geq 2$ donc $f(n) < 0$ et $\left(n - \frac{1}{2}\right) > 0$ donc $v_n - v_{n-1} < 0$ donc la suite (v_n) est décroissante.

$v_n = \ln(u_n)$ donc $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$ or $v_n < v_{n-1}$ donc $\mathrm{e}^{v_n} < \mathrm{e}^{v_{n-1}}$ soit $u_n < u_{n-1}$ donc la suite (u_n) est décroissante.

2. La suite (u_n) est décroissante à termes positifs donc est minorée par 0 donc la suite (u_n) converge vers un réel positif ou nul.

Partie III

1. g est la somme de fonctions dérivables donc g est dérivable sur $]\,1\,;+\infty\,[$

Soit $u(x) = x^2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ donc $u'(x) = 2\,x\left(x - \frac{1}{2}\right) + x^2 = x\left[2\left(x - \frac{1}{2}\right) + x\right] = x\,(3\,x - 1)$

$$g'(x) = f\,'(x) - \frac{1}{5} \times \frac{x\,(3\,x-1)}{x^4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \text{ donc } g'(x) = \frac{1}{4\,x\,(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{5} \times \frac{(3\,x-1)}{x^3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$g'(x) = \frac{5\,x^2 - 4\,(3\,x-1)\,(x-1)}{20\,x^3\,(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5\,x^2 - 4\,(3\,x^2 - 4\,x + 1)}{20\,x^3\,(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \text{ donc } g'(x) = \frac{-7\,x^2 + 16\,x - 4}{20\,x^3\,(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$$

2. $-7\,x^2 + 16\,x - 4 = 0$

$\Delta = 16^2 - 4 \times 4 \times 7 = 4^2 \times 9$ donc $x_1 = 2$ ou $x_2 = \frac{2}{7}$ donc sur $[\,2\,;+\infty\,[$, $-7\,x^2 + 16\,x - 4 \leq 0$ donc $g'(x) \leq 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{5\,x^2\left(x - \frac{1}{2}\right)} = 0 \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

$$g(2) = f(2) + \frac{1}{30} = \frac{7}{10} - \ln 2$$

x	2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	$g(2)$	$\searrow$	0

g est strictement croissante sur $[\,2\,;+\infty\,[$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ donc pour tout x de $[\,2\,;+\infty\,[$, $g(x) > 0$.

Partie IV

1. **Étude d'une suite auxiliaire**

a. La fonction $x \to \frac{1}{x^2}$ est strictement décroissante sur] 0 ; + ∞ [donc si $k \geq 2$, pour tout x de [$k - 1$; k], $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{k^2}$

$k - 1 \leq k$ et la fonction $x \to \frac{1}{x^2}$ est continue sur] 0 ; + ∞ [donc, pour tout entier $k \geq 2$, on a : $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$. (2)

b. $w_2 = \sum_{k=2}^{k=2} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ et $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ donc $w_2 \leq \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

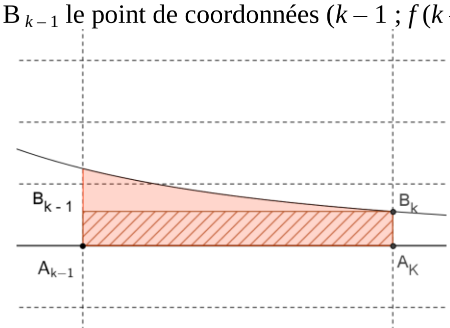
La propriété est vraie pour $n = 2$

Montrons que pour n entier supérieur ou égal à 2, si $w_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ alors $w_{n+1} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ or $w_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\frac{1}{(n+1)^2}$ $\int_n^{n+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ donc $w_{n+1} = \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

donc $w_{n+1} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, la propriété est héréditaire donc est vraie pour tout entier $n \geq 2$

Soit A_k le point de coordonnées (k ; 0) et A_{k-1} le point de coordonnées ($k - 1$; 0)
Soit B_k le point de coordonnées (k ; $f(k - 1)$) et B_{k-1} le point de coordonnées ($k - 1$; $f(k - 1)$)



Sur l'intervalle [$k - 1$; k] l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = k - 1$ et $x = k$ est supérieure à l'aire du rectangle $A_{k-1} A_k B_k B_{k-1}$.
L'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = 1$ et $x = k$ est supérieure à la somme des aires des rectangles $A_{k-1} A_k B_k B_{k-1}$ pour $2 \leq k \leq n - 1$

c. $\int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n = -\frac{1}{n} + 1$ donc $w_n \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1$

d. $w_{n+1} = w_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ donc $w_{n+1} > w_n$. La suite (w_n) est croissante majorée par 1 donc (w_n) converge vers un réel w tel que $w \leq 1$.

2. *a.* $f(x) = g(x) - \frac{1}{5x^2\left(x - \frac{1}{2}\right)}$, or pour tout x de [2 ; + ∞ [, $g(x) > 0$. donc pour tout x de [2 ; + ∞ [, $f(x) > -\frac{1}{5x^2\left(x - \frac{1}{2}\right)}$

pour tout entier $k \geq 2$, $v_k - v_{k-1} = \left(k - \frac{1}{2}\right) f(k)$ donc $v_k - v_{k-1} \geq -\frac{1}{5k^2}$

b. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $v_n \geq -\frac{1}{5} w_n + 1$.

$v_2 = \ln(1) + \ln(2) + 2 - 2\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = 2 - \frac{3}{2}\ln 2$

$w_2 = \frac{1}{4}$ donc $-\frac{1}{5} w_n + 1 = \frac{19}{20}$ or $2 - \frac{3}{2}\ln 2 \approx 0{,}96$ et $\frac{19}{20} = 0{,}95$ donc $v_2 \geq -\frac{1}{5} w_2 + 1$.

Montrons que pout tout $n \geq 2$, si $v_n \geq -\frac{1}{5} w_n + 1$, alors $v_{n+1} \geq -\frac{1}{5} w_{n+1} + 1$.

$v_{n+1} - v_n \geq -\frac{1}{5(n+1)^2}$ donc $v_{n+1} \geq v_n - \frac{1}{5(n+1)^2}$ soit $v_{n+1} \geq -\frac{1}{5} w_n + 1 - \frac{1}{5(n+1)^2}$ soit $v_{n+1} \geq -\frac{1}{5}\left(w_n + \frac{1}{(n+1)^2} \right) + 1$

or $w_n + \frac{1}{(n+1)^2} = w_{n+1}$ donc $v_{n+1} \geq -\frac{1}{5} w_{n+1} + 1$.

La propriété est héréditaire donc pour tout entier $n \geq 2$, on a : $v_n \geq -\frac{1}{5} w_n + 1$.

c. La suite (w_n) converge vers un réel w tel que $w \leq 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{5} w_n + 1 = 1 - \frac{1}{5} w$.

$w \leq 1$ donc $-\frac{1}{5} w \geq -\frac{1}{5}$ donc $1 - \frac{1}{5} w \geq \frac{4}{5}$

La suite v_n converge vers ℓ, la suite $\left(-\frac{1}{5} w_n + 1\right)$ converge vers $1 - \frac{1}{5} w$ et pour tout $n \geq 2$, $v_n \geq -\frac{1}{5} w_n + 1$ donc $\ell \geq -\frac{1}{5} w + 1$

soit $\ell \geq \frac{4}{5}$ donc $\ell > 0$.