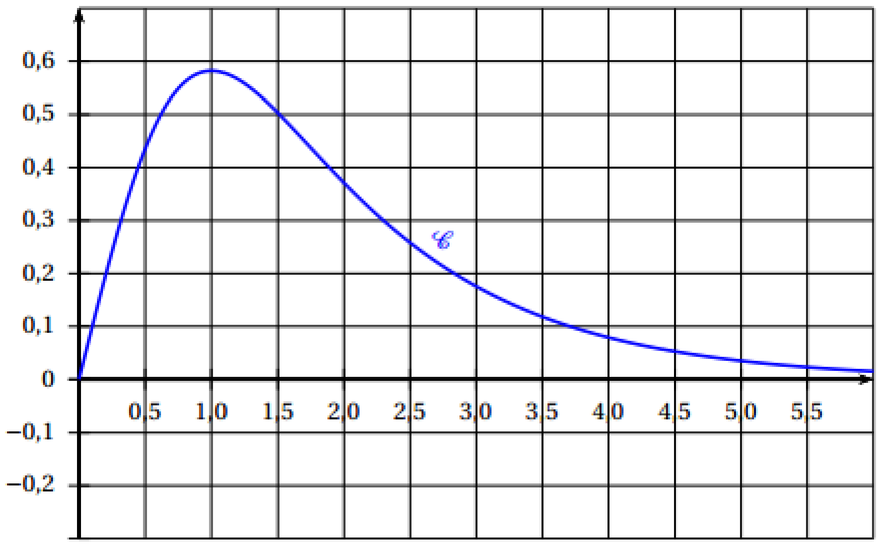
Métropole–La Réunion septembre 2015

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ telle que : $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-x}$

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan. La courbe C est représentée ci-dessous

Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur $[0\ ;6]$



Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par : $\quad I_n=\displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;+\infty[$: $\quad e^{x}-x\geq\dfrac{e^{x}}{2}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\quad I_n\leq\displaystyle\int_0^n 2x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ telle que : $H(x)=(-x-1)\,e^{-x}$
Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $I_n\leq 2$.

3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Partie B

On considère l'algorithme suivant dans lequel les variables sont :
— K et i des entiers naturels, K étant non nul ;
— A, x et h des réels.

Variables :	Saisir K entier naturel non nul
Initialisation :	Affecter à A la valeur 0 Affecter à x la valeur 0 Affecter à h la valeur $\dfrac{1}{k}$

Traitement :	Pour i variant de 1 à K
	  Affecter à A la valeur $A+h\times f(x)$
	  Affecter à x la valeur $x+h$
	Fin Pour

Sortie :	Afficher A

1. Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour K = 4. Les valeurs successives de A seront arrondies au millième.

i	A	x
1		
2		
3		
4		

2. En l'illustrant sur l'annexe à rendre avec la copie, donner une interprétation graphique du résultat affiché par cet algorithme pour K = 8.
3. Que donne l'algorithme lorsque K devient grand ?

CORRECTION

Partie A

1. $I_{n+1} - I_n = \int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$

Pour tout x, $\mathrm{e}^x \geq x + 1$ donc $\mathrm{e}^x - x \geq 1$ donc la fonction f est positive sur $[\,0\,;+\infty\,[$ donc $\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

$I_{n+1} - I_n \geq 0$ donc la suite (I_n) est croissante.

2. *a.* $\mathrm{e}^x - x \geq \frac{\mathrm{e}^x}{2}$ donc $\frac{1}{\mathrm{e}^x - x} \leq \frac{2}{\mathrm{e}^x}$ soit $\frac{1}{\mathrm{e}^x - x} \leq 2\,\mathrm{e}^{-x}$ donc pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty\,[$, $f(x) \leq 2\,x\,\mathrm{e}^{-x}$

donc pour tout entier naturel n, $I_n \leq \int_0^n 2\,x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

b. Soit $\begin{cases} u(x) = -x-1 & u'(x) = -1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x} & v'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$ donc $\mathrm{H}'(x) = -\mathrm{e}^{-x}(-x-1) - \mathrm{e}^{-x} = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

c. $\mathrm{H}'(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ donc H est une primitive de la fonction $x \to x\,\mathrm{e}^{-x}$

$\int_0^n 2\,x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{H}(n) - 2\,\mathrm{H}(0) = 2\,(-n-1)\,\mathrm{e}^{-n} - (-2) = 2 - 2\,(n+1)\,\mathrm{e}^{-n}$

$2\,(n+1)\,\mathrm{e}^{-n} > 0$ donc $2 - 2\,(n+1)\,\mathrm{e}^{-n} \leq 2$ donc $I_n \leq \int_0^n 2\,x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leq 2$ soit $I_n \leq 2$.

3. La suite (I_n) est croissante majorée par 2 donc est convergente. Sa limite est comprise entre 0 et 2.

Partie B

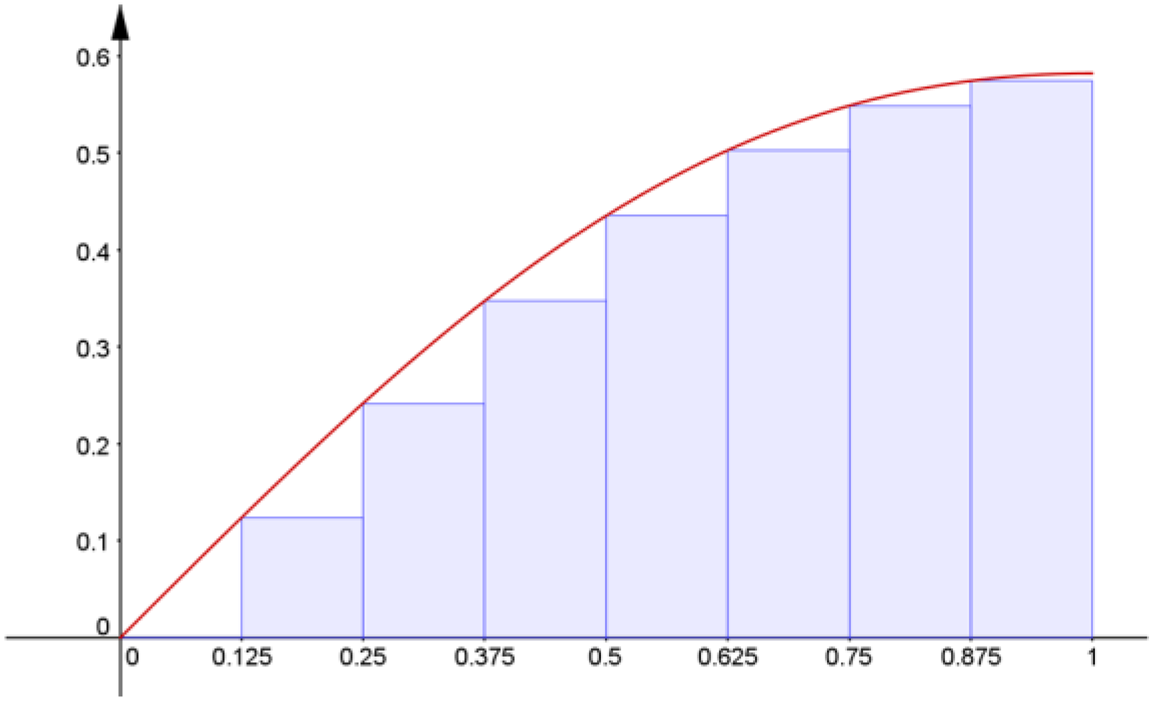
1.

i	A	x
1	0,060443389	0,25
2	0,169260038	0,5
3	0,306421704	0,75
4	0,451915881	1

donc en prenant une valeur approchée au millième de A

i	A	x
1	0	0,25
2	0,06	0,5
3	0,169	0,75
4	0,306	1

2. L'algorithme permet de calculer, par la méthode des rectangles, une approximation de l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.



3. L'algorithme, lorsque K devient grand, donne une approximation de l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$ donc donne une valeur approchée de $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.