

Antilles Guyane juin 2014

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types d'hébergements : l'hébergement A et l'hébergement B. Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €.

Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.

On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B.

1. a. Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et à 9.

b. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples $(x ; y)$ possibles.

Entrée :	x et y sont deux nombres	
Traitement :	Pour x variant de 0 à ...	(1)
	Pour y variant de 0 à ...	(2)
	Si	(3)
	Afficher x et y	
	Fin Si	
	Fin Pour	
	Fin Pour	
Fin traitement		

2. Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.

a. Justifier que l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

b. Déterminer une telle solution.

c. Résoudre l'équation (E) : $8x + 15y = 146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

4. Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.

Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B. Calculer ces nombres.

CORRECTION

1. a. La somme dépensée est égale à $24x + 45y = 438$

$y \geq 0$ donc $24x \leq 438$ donc $x \leq \frac{438}{24}$, soit $x \leq 18,25$ or x est

un entier naturel donc $x \leq 18$

$x \geq 0$ donc $45y \leq 438$ donc $y \leq \frac{438}{45}$ or $\frac{438}{45} \approx 9,74$ or y est

un entier naturel donc $y \leq 9$

b.

Entrée :	x et y sont deux nombres	
Traitement :	Pour x variant de 0 à 18	(1)
	Pour y variant de 0 à 9	(2)
	Si $24x + 45y = 438$	(3)
	Afficher x et y	
	Fin Si	
	Fin Pour	
	Fin Pour	
Fin traitement		

2. Le coût total de la réservation $24x + 45y$ donc $3(8x + 15y)$

$8x + 15y$ est un entier naturel donc le coût total de la réservation est un multiple de 3.

a. 8 et 5 sont deux nombres premiers entre eux donc d'après le théorème de Bézout, l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

b. $8 \times 2 = 16 = 15 + 1$ donc $8 \times 2 + 15 \times (-1) = 1$ donc $(2 ; -1)$ est solution de l'équation $8x + 15y = 1$.

c. $8 \times 2 + 15 \times (-1) = 1$

donc $8 \times 2 \times 146 + 15 \times (-1) \times 146 = 146$

donc $8 \times 292 + 15 \times (-146) = 146$

$(292 ; -146)$ est solution de l'équation $8x + 15y = 146$.

$\begin{cases} 8x + 15y = 146 \\ 8 \times 292 + 15 \times (-146) = 146 \end{cases}$

$\begin{cases} 8x + 15y = 146 \\ 8 \times 292 + 15 \times (-146) = 146 \end{cases}$

donc par différence terme à terme :

$8(x - 292) + 15(y + 146) = 0 \Leftrightarrow 8(x - 292) = -15(y + 146)$

8 divise $-15(y + 146)$, 8 et 15 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 8 divise $y + 146$, il existe un entier relatif k tel que $y + 146 = 8k$ soit $y = 8k - 146$

En remplaçant dans $8(x - 292) = -15(y + 146)$

alors $8(x - 292) = -15 \times 8k$ donc $x - 292 = -15k$

donc $x = -15k + 292$

Réciproquement :

$8x + 15y = 8(-15k + 292) + 15(8k - 146)$

$8x + 15y = -15 \times 8k + 8 \times 292 + 15 \times 8k - 15 \times 146$

or $8 \times 292 - 15 \times 146 = 146$ donc $8x + 15y = 146$

Les couples $(-15k + 292 ; 8k - 146)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont solutions de $8x + 15y = 146$.

4. Le coût total de la réservation $3(8x + 15y) = 438$ or $438 = 3 \times 146$ donc $8x + 15y = 146$

Les couples $(-15k + 292 ; 8k - 146)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont solutions de $8x + 15y = 146$.

Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A donc $0 \leq x \leq 13$

$x = -15k + 292$ et $0 \leq -15k + 292 \leq 13 \Leftrightarrow 15k \leq 292$ et

$292 - 13 \leq 15k$ donc $\frac{279}{15} \leq k \leq \frac{292}{15}$ or $\frac{292}{15} \approx 19,47$ donc

$18,6 \leq k \leq 19,5$,

k est un entier donc $k = 19$ donc en remplaçant :

$x = -15 \times 19 + 292$ et $y = 8 \times 19 - 146$

$x = 7$ et $y = 6$

Le randonneur a passé 7 nuits dans l'hébergement A et 6 dans l'hébergement B.