Métropole juin 2012

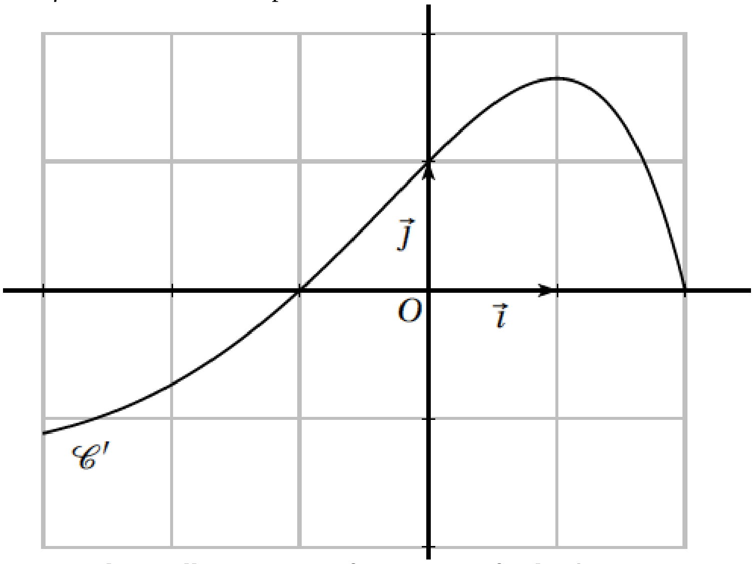
EXERCICE 1 **(4 points)** ***Commun à tous les candidats***

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\,;2]$.

On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée $f\,'$ de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{C}'$ ci-dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;-1]$, $f\,'(x) \leq 0$.

2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;2]$, $f(x) \geq -1$.

4. Soit C la courbe représentative de la fonction f.

La tangente à la courbe C au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées (1, 0).

EXERCICE 2 **(5 points)** ***Commun à tous les candidats***

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante.

Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier.

40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise.

Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus.

Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

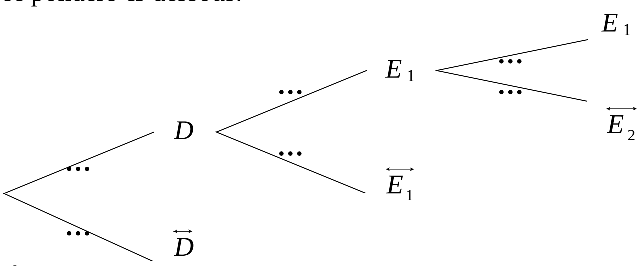
On considère les événements suivants :

D : « Le candidat est retenu sur dossier »,

E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,

E_2 : « Le candidat est recruté ».

a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. Calculer la probabilité de l'événement E_1.

c. On note F l'événement « Le candidat *n*'est pas recruté ».

Démontrer que la probabilité de l'événement F est égale à 0,93.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise.

Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres.

On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 ?

EXERCICE 3 **(6 points)** ***Commun à tous les candidats***

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle [1 ; + ∞ [par : $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en + ∞.

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle [1 ; + ∞ [, $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle [1 ; + ∞ [.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels.
	u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n.
	Affecter à u la valeur $u + \dfrac{1}{i}$,
Sortie :	Afficher u.

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632

n	10	100	1000	1500	2000
u_n	0,626	0,582	0,578	0, 578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.

Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$

où f est la fonction définie dans la partie **A**.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. *a.* Soit k un entier strictement positif. Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \geq 0$

En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$

Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$ (1).

b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par 1, 2, ..., n et démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

c. En déduire que pour tout entier strictement positif n, $u_n \geq 0$.

3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

EXERCICE 4 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z différente de -1, fait correspondre le point M' d'affixe $\dfrac{1}{z+1}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x=-\dfrac{1}{2}$.

1. Soient A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_A=-\frac{1}{2}\ ;\ z_B=-\frac{1}{2}+\text{i et } z_C=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\text{i}.$$

a. Placer les trois points A, B et C sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique.
b. Calculer les affixes des points $A'=f(A)$, $B'=f(B)$ et $C'=f(C)$, et placer les points A', B' et C' sur la figure.
c. Démontrer que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.
2. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $z+1$.
a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.
b. Sans donner d'explication, placer les points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g de A, B et C et tracer la droite $\mathcal{D}_1$, image de la droite $\mathcal{D}$ par g.
c. Démontrer que $\mathcal{D}_1$ est l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

$$|z-1|=|z|.$$

3. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z}$.
a. Justifier que $h(A_1)=A'$, $h(B_1)=B'$ et $h(C_1)=C'$.
b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a :

$$\left|\frac{1}{z}-1\right|=1 \Leftrightarrow |z-1|=|z|.$$

c. En déduire que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est incluse dans un cercle C dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.
On admet que l'image par h de la droite D_1 est le cercle C privé de O.
4. Déterminer l'image par l'application f de la droite $\mathcal{D}$.

EXERCICE 4 (5 points) ***Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité***
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_A=-1+\text{i}\,,\ z_B=2\text{i et } z_C=1+3\text{i}$$

et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y=x+2$.
1. Prouver que les points A, B et C appartiennent à la droite $\mathcal{D}$.
Sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique, placer les points A, B, C et tracer la droite $\mathcal{D}$.

2. Résoudre l'équation $(1+\text{i})z+3-\text{i}=0$ et vérifier que la solution de cette équation est l'affixe d'un point qui *n*'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.
Dans la suite de l'exercice, on appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z différente de $-1+2\text{i}$, fait correspondre le point M' d'affixe : $\dfrac{1}{(1+\text{i})z+3-\text{i}}$
Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathcal{D}$.

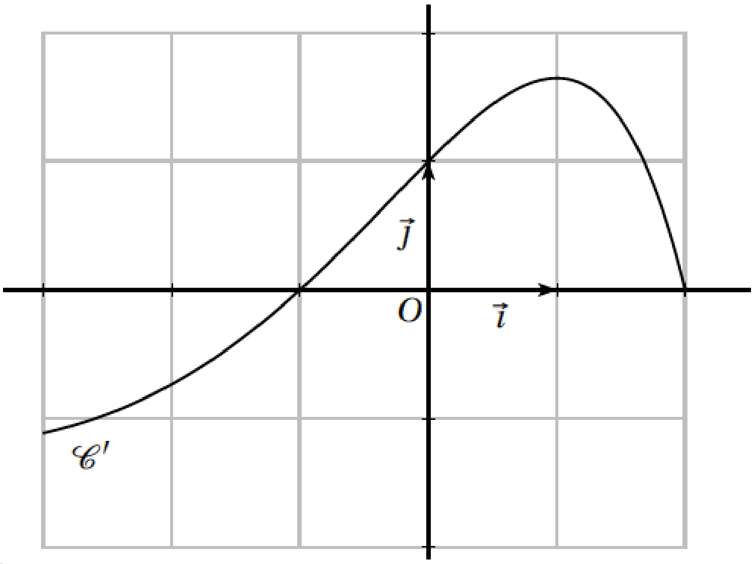
3. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $(1+\text{i})z+3-\text{i}$.
a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.
b. Calculer les affixes des points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g des points A, B et C.
c. Déterminer l'image $\mathcal{D}_1$ de la droite $\mathcal{D}$ par la transformation g et la tracer sur la figure.

4. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, fait correspondre le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z}$.
a. Déterminer les affixes des points $h(A_1)$, $h(B_1)$ et $h(C_1)$ et placer ces points sur la figure.
b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a : $\left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow |z-2|=|z|$.
c. En déduire que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est incluse dans un cercle C dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.
d. Démontrer que tout point du cercle C qui est distinct de O est l'image par h d'un point de la droite $\mathcal{D}_1$.

5. Déterminer l'image par l'application f de la droite $\mathcal{D}$.

CORRECTION

EXERCICE 1 **(4 points)** ***Commun à tous les candidats***



D’après le graphique et l’énoncé :

x	-3	-1		0		2
$f'(x)$	$-$	0	$+$	1	$+$	0
f	↘	m	↗	-1	↗	

avec $m = f(-1)$ inconnu. On peut donc en déduire :

1. **VRAI**

La courbe de f' est situé en dessous de l’axe des abscisses sur $[-3 ; -1]$, donc pour tout réel x de l’intervalle $[-3 ; -1]$, $f'(x) \leq 0$.

2. **VRAI**

La courbe de f' est situé au dessus de l’axe des abscisses sur $[-1 ; 2]$, donc pour tout réel x de l’intervalle $[-1 ; 2]$, $f'(x) \geq 0$ donc la fonction f est croissante sur l’intervalle $[-1 ; 2]$.

3. **FAUX**

la fonction f est strictement croissante sur l’intervalle $[-1 ; 2]$ et $f(0) = -1$ donc pour tout réel x de l’intervalle $[-1 ; 0[$, $f(x) < f(0)$ soit $f(x) < -1$.

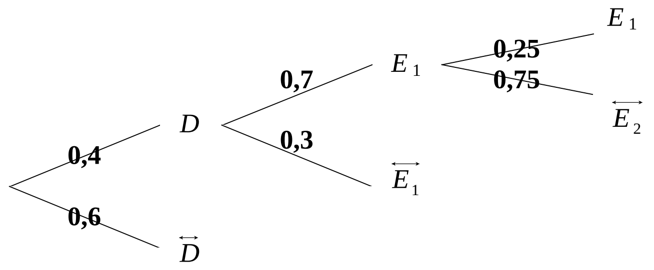
4. **VRAI**

La tangente à la courbe C au point d’abscisse 0 est la droite d’équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ soit $y = x - 1$

Quand $x = 1$ alors $y = 0$ donc cette droite passe par le point de coordonnées (1, 0).

EXERCICE 2 **(5 points)** ***Commun à tous les candidats***

1. *a.*



b. $p(E_1) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$

c. $p(F) = p(\overline{D}) + p(D \cap \overline{E_1}) + p(D \cap \overline{E_2})$ donc $p(F) = 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}7 \times 0{,}75 = 0{,}93$

2. *a.* On a une succession de 5 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

- succès : le candidat est recruté $p = 0{,}07$
- échec : le candidat *n*'est pas recruté $q = 1 - p = 0{,}93$

donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres (5 ; 0,07)

b. $p(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0{,}07^2 \times 0{,}93^3$ donc $(X = 2) \approx 0{,}039$.

3. $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

La probabilité d'embaucher au moins un candidat est égale à $1 - 0{,}93^n$

Il faut chercher pour quelles valeurs de n : $1 - 0{,}93^n \geq 0{,}999$

soit $0{,}001 \geq 0{,}93^n \Leftrightarrow \ln 0{,}001 \geq n \ln 0{,}93 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}93}$ or $\dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}93} \approx 95{,}187$

$n \geq \dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}93} \Leftrightarrow n \geq 96$

Il faut donc que le cabinet de recrutement traite au minimum 96 dossiers pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999.

EXERCICE 3 **(6 points)** ***Commun à tous les candidats***

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ (rapport des termes de plus haut degré)

La fonction logarithme népérien est continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$ donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \ln 1 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. $x \geq 1$, donc $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln x - \ln(x+1)$

Pour tout réel x de l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

$f'(x) = \dfrac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-x + x^2 + 2x + 1 - x^2 - x}{x(x+1)^2}$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

Sur $[\,1\,;+\infty\,[$, $x > 0$ et $(x+1)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

3. f strictement croissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc f est strictement négative sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

Partie B

1.

Variables :	i	u
Initialisation :		0
Etape 1	1	$0 + \dfrac{1}{1} = 1$
Etape 2	2	$1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$
Etape 3	3	$\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$

2.

Variables :	i et n sont des entiers naturels.
	u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n.
	Affecter à u la valeur $u + \dfrac{1}{i}$,
	Affecter à u la valeur $u - \ln(n)$.
Sortie :	Afficher u

3. D'après le tableau, la suite (u_n) semble être décroissante, peut-être convergente mais il est impossible de donner la valeur exacte de la limite.

Partie C

1. pour tout entier strictement positif n, $u_{n+1} - u_n =$

$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n\right)$ donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = f(n)$

f est strictement négative sur $[\,1\,;+\infty\,[$ donc pour tout entier strictement positif n, $_{n+1} - u_n < 0$

La suite (u_n) est décroissante.

2. *a.* Soit k un entier strictement positif. Si $k \leq x \leq k+1$, alors $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{k+1}$ donc $\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geq 0$

La fonction $x \to \frac{1}{k} - \frac{1}{x}$ est continue sur $[\,1\,;+\infty\,[$ et $k < k+1$ donc : $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x \geq 0$

$$\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x \geq 0 \Leftrightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x - \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k} \int_k^{k+1} 1\,\mathrm{d}x - \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k}(k+1-1) \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

soit $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$

$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left. \ln x \right._k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k$ donc $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

b.

Si $k = 1$	$\ln 2$	$-$	$\ln 1$	≤ 1
Si $k = 2$	$\ln 3$	$-$	$\ln 2$	$\leq \frac{1}{2}$
Si $k = 3$	$\ln 4$	$-$	$\ln 3$	$\leq \frac{1}{3}$
…	…	…	…	…
Si $k = n-1$	$\ln n$	$-$	$\ln(n-1)$	$\leq \frac{1}{n-1}$
Si $k = n$	$\ln(n+1)$	$-$	$\ln n$	$\leq \frac{1}{n}$

Par addition terme à terme :

$(\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + (\ln n - \ln(n-1)) + (\ln(n+1) - \ln n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

donc après simplification : $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

c. $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ et $\ln n \leq \ln(n+1)$ donc

$\ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ soit $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \geq 0$

Pour tout entier strictement positif n, $u_n \geq 0$.

3. La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 donc est convergente.

EXERCICE 4 **(5 points)** ***Candidats n'ayant pas suivi** l'**enseignement de spécialité***

1. *a.*

b. $A' = f(A)$ a pour affixe : $\dfrac{1}{-0,5+1} = 2$

$B' = f(B)$ a pour affixe : $\dfrac{1}{-0,5+\mathrm{i}+1} = \dfrac{1}{0,5+\mathrm{i}} = \dfrac{2}{1+2\,\mathrm{i}}$ donc $b' = \dfrac{2\,(1-2\,\mathrm{i})}{(1+2\,\mathrm{i})\,(1-2\,\mathrm{i})}$ donc $b' = 0,4 - 0,8\,\mathrm{i}$

$C' = f(C)$ a pour affixe : $\dfrac{1}{-0,5-0,5\,\mathrm{i}+1} = \dfrac{1}{0,5+0,5\,\mathrm{i}}$ donc $c' = 2\,\dfrac{1+\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})\,(1-\mathrm{i})}$ donc $c' = 1+\mathrm{i}$

c. $\overrightarrow{A'B'}$ a pour coordonnées (0,4 – 2 ; – 0,8) soit (– 1,6 ; – 0,8)

$\overrightarrow{A'C'}$ a pour coordonnées (1 – 2 ; 1) soit (– 1 ; 1)

Les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ sont colinéaires or les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

f ne transforme pas la droite $\mathcal{D}$ en une autre droite.

2. *a.* Le plan complexe est muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$, $\vec{u}$ a pour affixe 1 or $(z+1)-z = 1$ donc pour tout point M du plan $\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$ donc g est une translation de vecteur $\vec{u}$.

b. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$

c. $|z-1| = |z| \Leftrightarrow$ MD = OM où D est le point d'affixe 1

L'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z-1| = |z|$ est la médiatrice du segment [OD] donc est la droite $\mathcal{D}_1$.

3. *a.* A_1 a pour affixe $\dfrac{1}{2}$ donc $h(A_1)$ a pour affixe $\dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ donc $h(A_1) = A'$,

B_1 a pour affixe $\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}$ donc $h(B_1)$ a pour affixe $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\mathrm{i}} = \dfrac{2}{1+2\,\mathrm{i}}$ soit $\dfrac{2\,(1-2\,\mathrm{i})}{(1-2\,\mathrm{i})\,(1+2\,\mathrm{i})} = \dfrac{2\,(1-2\,\mathrm{i})}{5} = 0,4 - 0,8\,\mathrm{i}$

donc $h(B_1) = B'$

C_1 a pour affixe $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ donc $h(CB_1)$ a pour affixe $\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}} = \dfrac{2}{1-\mathrm{i}}$ soit $1+\mathrm{i}$ donc $h(C_1) = C'$.

b. Pour tout nombre complexe non nul z, on a :

$\left|\dfrac{1}{z} - 1\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1-z}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|1-z|}{|z|} = 1 \Leftrightarrow |1-z| = |z|$ or $1 - z = -(z-1)$ donc $|1-z| = |z-1|$

$\left|\dfrac{1}{z} - 1\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z|$.

c. Soit E l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$.

M' ∈ E ⇔ il existe un point M (d'affixe z non nulle) appartenant à D tel que $z' = \dfrac{1}{z}$

La droite $\mathcal{D}_1$ est l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z-1| = |z|$

M' ∈ E ⇔ il existe un point M d'affixe z non nulle telle que $|z-1| = |z|$ et $z \neq 0$ donc $\left|\dfrac{1}{z} - 1\right| = 1$ donc $|z' - 1| = 1$ soit DM' = 1

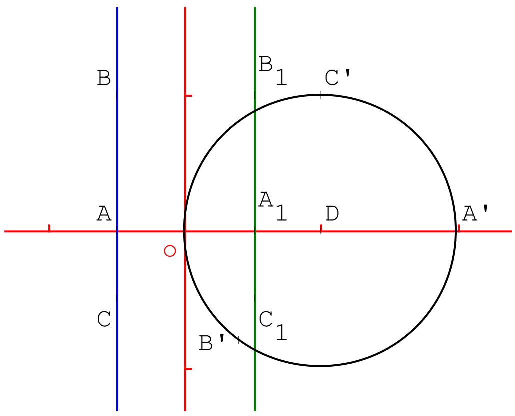
donc M' appartient au cercle de centre D de rayon 1.

E est incluse dans le cercle de centre D de rayon 1.

4. $M(z) \xrightarrow[g]{} M_1(z_1) \xrightarrow[h]{} M'(z')$

$f = h \circ g$ or la droite $\mathcal{D}$ est transformé par g en $\mathcal{D}_1$

$\mathcal{D}_1$ est transformée par h en E donc l'image par l'application f de la droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble E soit le cercle de centre D de rayon 1 privé de O.



EXERCICE 4 **(5 points)** ***Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité***

1. $\mathcal{D}$ est la droite d'équation $y = x + 2$, les coordonnées de A, B et C vérifient cette relation donc les points A, B et C appartiennent à la droite $\mathcal{D}$.

2. $(1+ \text{i})\, z +3 - \text{i} = 0 \Leftrightarrow (1 + \text{i})\, z = -3 + \text{i} \Leftrightarrow (1 + \text{i})\,(1 - \text{i})\, z = (-3 + \text{i})\,(1 - \text{i})$
$\Leftrightarrow 2\,z = -3 + \text{i} + 3\,\text{i} + 1 \Leftrightarrow 2\,z = -2 + 4\,\text{i} \Leftrightarrow z = -1 + 2\,\text{i}$
Si $x = -1$ et $y = 2$ alors $x + 2 = 1$ donc $x + 2 \neq y$ donc la solution de cette équation est l'affixe d'un point qui *n*'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

3. *a.* L'écriture complexe de g est de la forme $z' = a\,z + b$ avec $a = 1 + \text{i}$ et $b = 3 - \text{i}$ donc g est une similitude directe de rapport $|\,a\,| = \sqrt{2}$ et d'angle arg a soit $\dfrac{\pi}{4}$.
Le centre de la similitude est l'unique point invariant donc son affixe est solution de $z = (1 + \text{i})\, z +3 - \text{i}$, donc $\text{i}\, z = -3 + \text{i}$
soit $z = 1 + 3\,\text{i}$.
Le centre de la similitude est le point C d'affixe $1 + 3\,\text{i}$.

b. A_1 a pour affixe $(1 + \text{i})\,(-1 + \text{i}) + 3 - \text{i}$ soit $1 - \text{i}$
B_1 a pour affixe $(1 + \text{i}) \times 2\,\text{i} + 3 - \text{i}$ soit $1 + \text{i}$
Le centre de la similitude est le point C donc $C_1 = C$ d'affixe $1 + 3\,\text{i}$

c. Une similitude directe transforme une droite en une droite donc g transforme la droite (BC) en la droite (B_1C) d'équation $x = 1$.

4. *a.* $h\,(A_1)$ a pour affixe $\dfrac{1}{1-\text{i}} = \dfrac{1+\text{i}}{2}$,

$h\,(B_1)$ a pour affixe $\dfrac{1}{1+\text{i}} = \dfrac{1-\text{i}}{2}$,

$h\,(C_1)$ a pour affixe $\dfrac{1}{1+3\,\text{i}} = \dfrac{1-3\,\text{i}}{10}$

b. pour tout nombre complexe non nul z, on a : $\left|\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\dfrac{2-z}{2\,z}\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\dfrac{2-z}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow |\,2 - z\,| = |\,z\,| \Leftrightarrow |\,z - 2\,| = |\,z\,|$.

c. Soit E l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$.

M' $\in$ E $\Leftrightarrow$ il existe un point M (d'affixe z non nulle) appartenant à D tel que $z' = \dfrac{1}{z}$

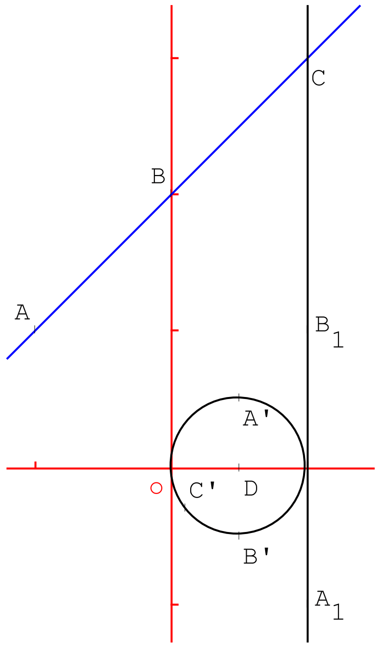
La droite $\mathcal{D}_1$ est l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|\,z - 2\,| = |\,z\,|$

M' $\in$ E $\Leftrightarrow$ il existe un point M appartenant à D tel que $|\,z - 2\,| = |\,z\,|$ et $z \neq 0$ donc $\left|\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ donc $|\,z' - 0,5\,| = 0,5$ soit DM' = 0,5 où D est le point d'affixe 0,5 donc M' appartient au cercle de centre D de rayon 0,5.
E est incluse dans le cercle de centre D de rayon 0,5.

d. Soit M un quelconque point du cercle C distinct de O
M $\in$ C donc $|\,Z - 0,5\,| = 0,5$ avec $Z \neq 0$
Soit M' le point d'affixe $z = \dfrac{1}{Z}$, donc $Z = \dfrac{1}{z}$

$|\,Z - 0,5\,| = 0,5 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow |\,z - 2\,| = |\,z\,| \Leftrightarrow$ M' $\in \mathcal{D}_1$.
donc $h(D_1)$ = E : cercle de centre D de rayon 0,5 privé de O.

5. $M\,(z) \xrightarrow[g]{} M_1\,(z_1) \xrightarrow[h]{} M'\,(z')$
$f = h \circ g$ or la droite $\mathcal{D}$ est transformé par g en $\mathcal{D}_1$
$\mathcal{D}_1$ est transformée par h en E donc l'image par l'application f de la droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble E soit le cercle de centre D de rayon 0,5 privé de O.



C
B
A
B1
A'
O
C'
D
B'
A1