ANTILLES – GUYANE SEPTEMBRE 2006

On se propose de déterminer des valeurs approchées de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{10\,t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t$ en utilisant deux méthodes distinctes.

Les parties A et B sont largement indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE A

Utilisation d'une intégration par parties

1. En remarquant que $\frac{10\,t^2}{1+t^2} = 5\,t \times \frac{2\,t}{1+t^2}$, établir l'égalité $I = \frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right) - 5\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}\,t$

2. On pose, pour x positif ou nul, $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ et $g(x) = \ln(1+x) - x$.

a. En utilisant les variations de f, démontrer que $f(x) \geq 0$. En procédant de la même façon, on pourrait établir que $g(x) \geq 0$, inégalité que l'on admettra ici.

b. À l'aide de ce qui précède, montrer que l'encadrement : $t^2 - \frac{t^4}{2} \leq \ln(1+t^2) \leq t^2$ est vrai pour tout réel t.

c. Déduire de la question précédente que $-\frac{5}{24} \leq -5\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \leq -\frac{37}{192}$

3. En utilisant les questions précédentes, donner un encadrement d'amplitude inférieure à 0,02 de I par des nombres décimaux ayant trois chiffres après la virgule.

PARTIE B

Utilisation de la méthode d'Euler

1. On pose $\varphi(x) = \int_0^x \frac{10\,t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t$ pour $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

Préciser $\varphi(0)$ ainsi que la fonction dérivée de φ.

2. On rappelle que la méthode d'Euler permet de construire une suite de points $M_n(x_n\,;y_n)$ proches de la courbe représentative de φ. En choisissant comme pas $h = 0{,}1$, on obtient la suite de points M_n définie pour n entier naturel par :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 0{,}1 \\ y_{n+1} = y_n + \varphi'(x_n) \times 0{,}1 \end{cases}$$

En utilisant, sans la justifier, l'égalité $x_n = \frac{n}{10}$, vérifier que $y_{n+1} = y_n + \frac{n^2}{100+n^2}$.

3. Calculer y_1, et y_2, puis exprimer y_3, y_4 et y_5 sous la forme d'une somme de fractions que l'on ne cherchera pas à simplifier. Donner maintenant une valeur approchée à 0,001 près de y_5.

Le réel x_5 étant égal à $\frac{1}{2}$, y_5 est donc une valeur approchée de $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$ c'est-à-dire de I.

4. Avec la méthode d'Euler au pas $h = 0{,}01$, on obtient, pour I, la valeur approchée 0,354.

Les valeurs de I obtenues avec la méthode d'Euler sont-elles compatibles avec l'encadrement de la question 3. de la partie A ?

CORRECTION

Partie A

1. $\frac{10\,t^2}{1+t^2} = 5\,t \times \frac{2\,t}{1+t^2}$

soit $u'(t) = \frac{2\,t}{1+t^2}$ alors $u'(t) = \ln(1+t^2)$

$v(t) = 5\,t$ donc $v'(t) = 5$ donc par intégration par parties : $I = \left[5\,t\ln(1+t^2)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} 5\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$

$I = \frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right) - 5\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}\,t$

2\. *a*. f est définie dérivable sur $[0\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$

$x \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0\,;+\infty[$

$f(0) = 0$ donc si $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0)$ soit $f(x) \geq 0$ donc pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

g est définie dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$

$x \geq 0$ donc $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante sur $[0\,;+\infty[$

$g(0) = 0$ donc si $x \geq 0$, $g(x) \leq g(0)$ soit $g(x) \leq 0$ donc pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.

soit pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2. *b*. Soit t un réel quelconque, $t^2 \geq 0$ donc en appliquant la relation précédente à t^2 : pour tout t réel : $t^2 - \dfrac{t^4}{2} \leq \ln(1+t^2) \leq t^2$

2. *c*. pour tout t réel : $t^2 - \dfrac{t^4}{2} \leq \ln(1+t^2) \leq t^2$

Les fonctions intervenant dans cette inégalité sont continues sur $\mathbb{R}$, et $0 \leq \dfrac{1}{2}$ donc $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^2 - \dfrac{t^4}{2}\right) \mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{1}{2}} t^2\,\mathrm{d}t$

soit $\left[\dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^5}{10}\right]_0^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \leq \left[\dfrac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}$ donc $\dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{320} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{24}$

$\dfrac{37}{960} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{24}$ donc $-\dfrac{37}{192} \geq -5\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \geq -\dfrac{5}{24}$

3. $\mathrm{I} = \dfrac{5}{2}\ln\left(\dfrac{5}{4}\right) - 5\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$

donc $\dfrac{5}{2}\ln\left(\dfrac{5}{4}\right) - \dfrac{37}{192} \geq \dfrac{5}{2}\ln\left(\dfrac{5}{4}\right) - 5\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \geq \dfrac{5}{2}\ln\left(\dfrac{5}{4}\right) - \dfrac{5}{24}$

soit $\dfrac{5}{2}\ln\left(\dfrac{5}{4}\right) - \dfrac{37}{192} \geq \mathrm{I} \geq \dfrac{5}{2}\ln\left(\dfrac{5}{4}\right) - \dfrac{5}{24}$

$0{,}349 \leq \mathrm{I} \leq 0{,}366$

$0{,}366 - 0{,}349 = 0{,}17$ donc I est bien encadré par deux nombres décimaux ayant 3 chiffres après la virgule, et l’encadrement a une amplitude inférieure à 0,02

PARTIE B

1. La fonction $\psi : t \to \dfrac{10\,t^2}{1+t^2}$ est définie continue sur $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ donc φ est la primitive nulle en 0 de ψ sur $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$.

φ est dérivable sur $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ et $\varphi'(x) = \dfrac{10\,x^2}{1+x^2}$.

2. $y_{n+1} = y_n + \dfrac{10\,x_n^2}{1+x_n^2} \times 0{,}1 = y_n + \dfrac{n^2}{100+n^2}$

3. $y_1 = y_0 + \dfrac{0^2}{100+0^2} = 0$ donc $y_2 = y_1 + \dfrac{1^2}{100+1^2} = \dfrac{1}{101}$

$y_3 = y_2 + \dfrac{2^2}{100+2^2} = \dfrac{1}{101} + \dfrac{4}{104} = \dfrac{508}{10504}$

$y_4 = y_3 + \dfrac{3^2}{100+3^2} = \dfrac{508}{10\,504} + \dfrac{9}{109} = \dfrac{149\,908}{1144\,936}$

$y_5 = y_4 + \dfrac{4^2}{100+4^2} = \dfrac{149\,908}{1144\,936} + \dfrac{16}{116} = \dfrac{35\,708\,304}{132\,812\,576}$

$y_5 \approx 0{,}269$

4. Avec un pas de 0,1 ; $y_5 \approx 0{,}269$ or la partie A dit que $0{,}349 \leq \mathrm{I} \leq 0{,}366$ donc les valeurs de I obtenues par la méthode d’Euler ne sont pas compatibles avec les résultats de la partie A.

avec un pas de 0,1, $y_5 \approx 0{,}354$ donc les valeurs de I obtenues par la méthode d’Euler sont compatibles avec les résultats de la partie A.