n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

2. On pose $\alpha = n + 3$ et $\beta = 2n + 1$ et on note δ le PGCD de α et β.

a. Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.

b. Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.

3. On considère les nombres a et b définis par : $a = n^3 + 2n^2 - 3n$ et $b = 2n^2 - n - 1$
Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n - 1)$.

4. *a.* On note d le PGCD de $n(n + 3)$ et de $(2n + 1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.

b. En déduire le PGCD, Δ, de a et b en fonction de n.

c. Application :
Déterminer Δ pour $n = 2\,001$;
Déterminer Δ pour $n = 2\,002$.

CORRECTION

1. $(2n+1) - 2 \times n = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

2. On pose $\alpha = n + 3$ et $\beta = 2n + 1$ et on note δ le PGCD de α et β.

a. $2\alpha - \beta = 2(n + 3) - (2n + 1) = 5$,
δ divise α et β donc δ divise $2\alpha - \beta$ donc δ divise 5, $\delta > 0$ donc les valeurs possibles de δ sont 1 et 5.

b. α et β multiples de 5 $\Leftrightarrow \begin{cases} n+3 \equiv 0 \ [5]. \\ 2n+1 \equiv 0 \ [5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv -3 \ [5]. \\ 2n \equiv -1 \ [5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-2 \equiv -5 \ [5]. \\ 2n-4 \equiv -5 \ [5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-2 \equiv 0 \ [5]. \\ 2(n-2) \equiv 0 \ [5] \end{cases} \Leftrightarrow n - 2 \equiv 0 \, [5]$

α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.

3. $a = n(n^2 + 2n - 3) = n(n - 1)(n + 3)$
$b = 2n^2 - n - 1 = (n - 1)(2n + 1)$
$n \geq 2$ donc $n - 1 \geq 1$ donc a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n - 1)$.

4. *a.* $d = \text{PGCD}[n(n + 3)\,;(2n + 1)]$ donc d divise $2n + 1$ et d divise $n(n + 3)$
n et $2n+1$ sont premiers entre eux donc d divise $n + 3$
d divise $n + 3$ et $2n + 1$ donc d divise δ

δ divise $n + 3$ et $2n + 1$ donc δ divise $n(n + 3)$ et de $(2n + 1)$ donc δ divise d, $d > 0$ et $\delta > 0$ donc $d = \delta$.

b. $\Delta = (n - 1)\,\text{PGCD}[n(n + 3)\,;(2n + 1)] = (n - 1)\,d$
$n - 2$ est divisible par 5 $\Leftrightarrow$ α et β sont multiples de 5 donc $\delta = d = 5$
dans tous les autres cas, δ divise 5 et est différent de 5 donc $\delta = d = 1$
si $n = 5k + 2$ alors $d = 5$ donc $\Delta = 5(n - 1)$
si $n \neq 5k + 2$ alors $d = 1$ donc $\Delta = (n - 1)$

c. Application :
$n = 2\,001 = 5k + 1$ donc $\text{PGCD}(a\,;b) = 1$
$n = 2\,002 = 5k + 2$ donc $\text{PGCD}(a\,;b) = 5$